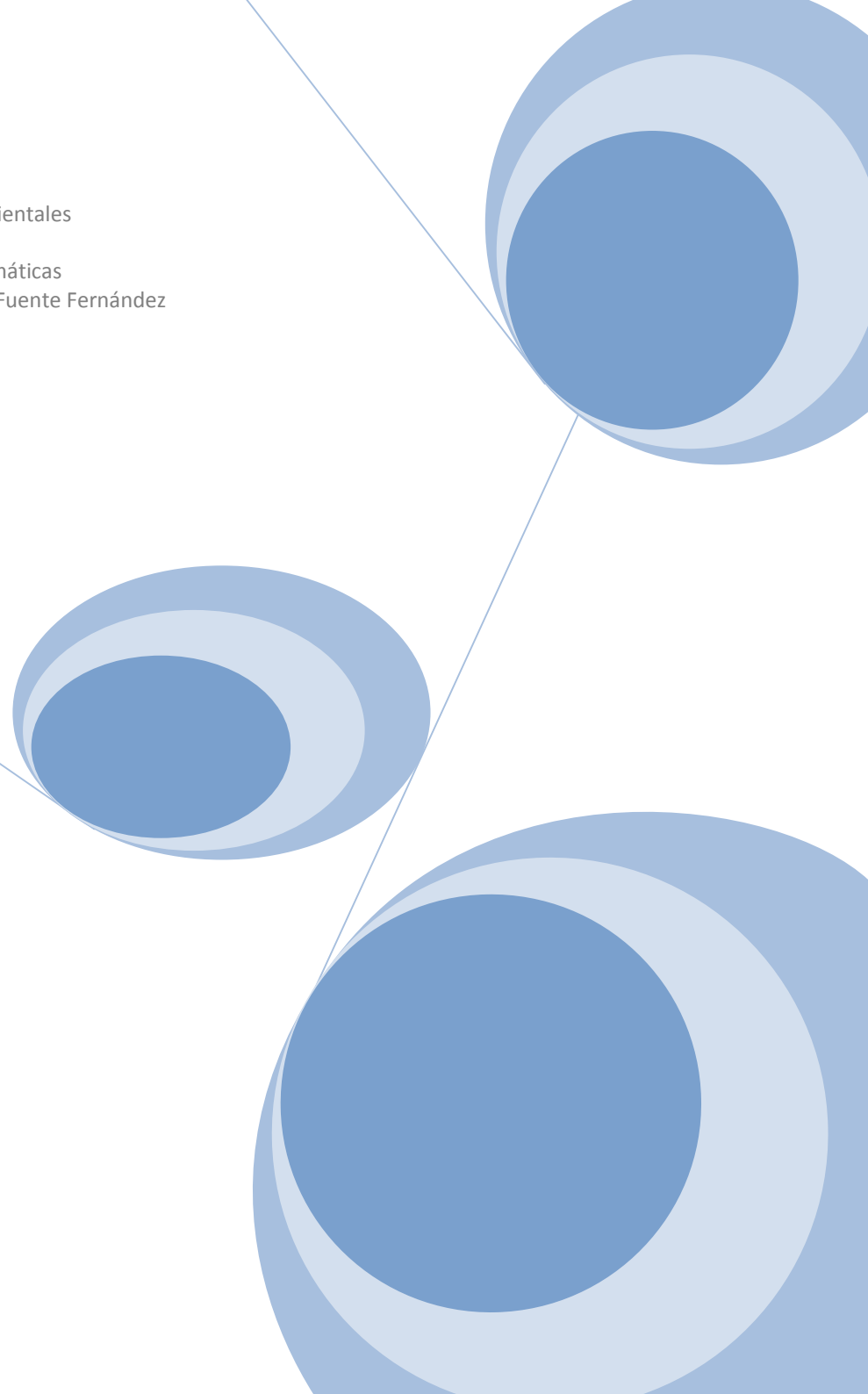




Estadística Ciencias Ambientales
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

ANÁLISIS VARIANZA MULTIFACTORIAL ANOVA II CON INTERACCIÓN



ANÁLISIS DE LA VARIANZA CON DOS FACTORES E INTERACCIÓN

$$\text{Modelo: } y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + U \quad i=1, 2, \dots, I \quad j=1, 2, \dots, J$$

y_{ij} \equiv representa la respuesta de la variable en el i -ésimo nivel del FACTOR 1 (α) y en el j -ésimo nivel del FACTOR 2 (β)

$\mu_{ij} = E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ es el valor medio de y_{ij}

α_i \equiv representa el efecto que sobre la media global μ tiene en el NIVEL i el FACTOR 1 (α)

β_j \equiv representa el efecto que sobre la media global μ tiene en el NIVEL j el FACTOR 2 (β)

$(\alpha\beta)_{ij}$ \equiv representa el efecto de la interacción entre el NIVEL i del FACTOR 1 (α) y el NIVEL j del FACTOR 2 (β)

U \equiv es la variación aleatoria de las y_{ij} (igual para todas).

Supondremos que U sigue una distribución $N(0, \sigma)$, lo que implica que y_{ij} sigue una distribución $N(\mu_{ij}, \sigma)$

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = \sum_{i=1}^I (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^J (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

FACTOR 2 (β)

| FACTOR 1 (α) | Niveles | 1 | 2 | | | J | Medias Filas |
|-----------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|-------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| | 1 | Y_{111} | Y_{121} | | | Y_{1J1} | $\bar{Y}_{1\bullet\bullet}$ |
| | | Y_{112} | Y_{122} | | | Y_{1J2} | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | $Y_{11 n_{11}}$ | $Y_{12 n_{12}}$ | | | $Y_{1J n_{1J}}$ | |
| | 2 | Y_{211} | Y_{221} | | | Y_{2J1} | $\bar{Y}_{2\bullet\bullet}$ |
| | | Y_{212} | Y_{222} | | | Y_{2J2} | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| $Y_{21 n_{21}}$ | | $Y_{22 n_{22}}$ | | | $Y_{2J n_{2J}}$ | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| I | Y_{I11} | Y_{I21} | | | Y_{IJ1} | $\bar{Y}_{I\bullet\bullet}$ | |
| | Y_{I12} | Y_{I22} | | | Y_{IJ2} | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | $Y_{I1 n_{I1}}$ | $Y_{I2 n_{I2}}$ | | | $Y_{IJ n_{IJ}}$ | | |
| Medias columnas | $\bar{Y}_{\bullet 1\bullet}$ | $\bar{Y}_{\bullet 2\bullet}$ | | | $\bar{Y}_{\bullet J\bullet}$ | $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$ | |

Muestra aleatoria n_{ij} observaciones casilla (i, j)

$$y_{ijk} \in N\left(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}; \sigma^2\right) \text{ independientes}$$

El origen de la descomposición de la varianza total, donde $k = n_{ij}$

$$(y_{ijk} - \bar{y}_{\dots}) = (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet}) + \overbrace{(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\dots})}^{(\alpha\beta)_{ij}} + \overbrace{(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\dots})}^{\hat{\alpha}_i} + \overbrace{(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\dots})}^{\hat{\beta}_j}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{SCT}{IJK-1}} &= \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})^2}_{\frac{SCR}{IJ(K-1)}} + \\ &+ \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{SCE(\alpha\beta)}{(I-1)(J-1)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{SCE(\alpha)}{I-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{SCE(\beta)}{J-1}} \end{aligned}$$

operando, resulta:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\text{SCT}}{\text{IJK}-1}}_{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{\dots})^2} = \\
& \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2}_{\frac{\text{SCR}}{\text{IJ}(\text{K}-1)}} + \underbrace{k \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{\text{SCE}(\alpha\beta)}{(\text{I}-1)(\text{J}-1)}} + \underbrace{\text{JK} \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{\text{SCE}(\alpha)}{\text{I}-1}} + \underbrace{\text{IK} \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2}_{\frac{\text{SCE}(\beta)}{\text{J}-1}}
\end{aligned}$$

$$\text{SCT} = \text{SCR} + \text{SCE}(\alpha\beta) + \text{SCE}(\alpha) + \text{SCE}(\beta)$$

SCT \equiv Variabilidad total de todos los datos

SCR \equiv Variabilidad debida a los factores

SCE($\alpha\beta$) \equiv Variabilidad debida a las interacciones

SCE(α) \equiv Variabilidad debida a los distintos niveles del Factor 1

SCE(β) \equiv Variabilidad debida a los distintos niveles del Factor 2

TABLA ANOVA: ANÁLISIS ESTADÍSTICO

| Fuente variación | Suma cuadrados | grados libertad | Varianza | Test F |
|---------------------|--|-----------------|---|---|
| Factor (α) | $SCE(\alpha) = JK \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$ | $(I-1)$ | $\hat{S}_{\alpha}^2 = \frac{SCE(\alpha)}{(I-1)}$ | $F_{\alpha} = \frac{\hat{S}_{\alpha}^2}{\hat{S}_r^2}$ |
| Factor (β) | $SCE(\beta) = IK \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$ | $(J-1)$ | $\hat{S}_{\beta}^2 = \frac{SCE(\beta)}{(J-1)}$ | $F_{\beta} = \frac{\hat{S}_{\beta}^2}{\hat{S}_r^2}$ |
| Interacción | $SCE(\alpha\beta) = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$ | $(I-1)(J-1)$ | $\hat{S}_{\alpha\beta}^2 = \frac{SCE(\alpha\beta)}{(I-1)(J-1)}$ | $F_{\alpha\beta} = \frac{\hat{S}_{\alpha\beta}^2}{\hat{S}_r^2}$ |
| Residual | $SCR = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$ | $IJ(K-1)$ | $\hat{S}_r^2 = \frac{SCR}{IJ(k-1)}$ | |
| Total | $SCT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$ | $IJK-1$ | | |

ANÁLISIS ESTADÍSTICO: Contraste del Efecto de cada factor

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$

$H_1 : \text{Algún } \alpha_i \neq 0$

EL FACTOR 1 (α) NO INFLUYE

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$

$H_1 : \text{Algún } \beta_j \neq 0$

EL FACTOR 2 (β) NO INFLUYE

$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

$H_1 : \text{Algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

NO HAY INTERACCIONES

ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \alpha_i \neq 0$$

EL FACTOR 1 (α) NO INFLUYE

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_\alpha = \frac{\hat{S}_\alpha^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (I-1), IJ(K-1)}$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \beta_j \neq 0$$

EL FACTOR 2 (β) NO INFLUYE

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_\beta = \frac{\hat{S}_\beta^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (J-1), IJ(K-1)}$$

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : \text{Algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

NO HAY INTERACCIONES

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\hat{S}_{\alpha\beta}^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (I-1)(J-1), IJ(K-1)}$$

Cuando se rechaza la hipótesis nula H_0 se pueden hacer pruebas simultáneas entre todas las posibles parejas de niveles en cada factor. Uno de los tests más empleados en las Pruebas Post hoc es el Test de Bonferroni.

CONDICIONES DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO ANOVA

- NORMALIDAD.- Los datos obtenidos en cada nivel de los factores se ajustan razonablemente a una distribución normal.
- y_{ij} sigue una distribución normal $N(\mu_{ij}, \sigma) \quad \forall i, j$
- HOMOCEDASTICIDAD.- La variabilidad de los datos en cada nivel de los factores es similar (contraste de igualdad de varianzas) - $\sigma^2 = \text{Var}(y_{ij}) \quad \forall i, j$
- LINEALIDAD.- Los residuos (diferencia de los datos a su media, en cada nivel de los factores) se distribuyen alrededor del cero.
 $E(U) = 0$
- INDEPENDENCIA.- Las observaciones se realizan de forma independiente unas de otras (diseño de la obtención de datos).

En caso de existir desviaciones significativas sobre estos requisitos, los resultados posteriores pueden ser incorrectos.

Uno de las opciones más utilizadas en las Pruebas Post hoc es el Test de Bonferroni



Se realizan comparaciones simultáneas entre todas las posibles parejas de niveles en cada factor. Para ello se construyen Intervalos de Confianza:

$$\text{FACTOR 1} \quad \text{IC}(\alpha_i - \alpha_j) = \left[\begin{array}{c} \text{Diferencia medias} \\ \overline{y}_{i\bullet\bullet} - \overline{y}_{j\bullet\bullet} \end{array} \pm \overbrace{t_{(\alpha/2c), (I-1)(J-1)} \hat{S}_r \sqrt{\frac{1}{J} + \frac{1}{J}}}^{\text{Error Típico}} \right]$$

$$\text{FACTOR 2} \quad \text{IC}(\beta_i - \beta_j) = \left[\begin{array}{c} \text{Diferencia medias} \\ \overline{y}_{\bullet i\bullet} - \overline{y}_{\bullet j\bullet} \end{array} \pm \overbrace{t_{(\alpha/2c), (I-1)(J-1)} \hat{S}_r \sqrt{\frac{1}{I} + \frac{1}{I}}}^{\text{Error Típico}} \right]$$

donde 'c' es el número de contrastes, esto es, el número de tests que hay que realizar para comparar todos los pares de medias $c = \binom{k}{2}$



Cuando el CERO no se encuentra en el Intervalo de Confianza, se afirma que las medias no son iguales.



EYSENCK (1974).- En un estudio sobre memoria verbal se seleccionaron al azar 50 personas mayores y 50 jóvenes (Factor 1: Edad). Dentro de cada uno de estos grupos se asignaron, al azar, 10 personas a 5 distintos grupos a los que se les presentó una misma lista de 27 palabras. A cada uno de los 5 grupos se les dieron las siguientes instrucciones (Factor 2: Método).

Grupo 1 (Contar): Se les pidió que contasen el número de letras de cada palabra. Grupo 2 (Rimar): Se les pidió que rimasen cada palabra con otra. Grupo 3 (Adjetivar). Se les pidió que a cada palabra le asignasen un adjetivo. Grupo 4 (Imaginar): Se les pidió que a cada palabra le asignasen una imagen. Grupo 5 (Recordar): Se les pidió que memorizasen las palabras.

I = 2 J = 5 K = 10

| | | FACTOR 2 (Método) J = 5 | | | | |
|-----------------|------------------|-------------------------|-------|-----------|----------|----------|
| | | Contar | Rimar | Adjetivar | Imaginar | Recordar |
| Factor 1 (Edad) | Mayores I = 2 | 9 | 7 | 11 | 12 | 10 |
| | | 8 | 9 | 13 | 11 | 19 |
| | | 6 | 6 | 8 | 16 | 14 |
| | | 8 | 6 | 6 | 11 | 5 |
| | | 10 | 6 | 14 | 9 | 10 |
| | | 4 | 11 | 11 | 23 | 11 |
| | | 6 | 6 | 13 | 12 | 14 |
| | | 5 | 3 | 13 | 10 | 15 |
| | | 7 | 8 | 10 | 19 | 11 |
| | | 7 | 7 | 11 | 11 | 11 |
| Jóvenes | 8 | 10 | 14 | 20 | 21 | |
| | 6 | 7 | 11 | 16 | 19 | |
| | 4 | 8 | 18 | 16 | 17 | |
| | 6 | 10 | 14 | 15 | 15 | |
| | 7 | 4 | 13 | 18 | 22 | |
| | 6 | 7 | 22 | 16 | 16 | |
| | 5 | 10 | 17 | 20 | 22 | |
| | 7 | 6 | 16 | 22 | 22 | |
| | 9 | 7 | 12 | 14 | 18 | |
| | 7 | 7 | 11 | 19 | 21 | |

K = 10

A los 4 primeros grupos no se les dijo que deberían recordar las palabras. Finalmente, tras revisar la lista 3 veces, se recogió el número de palabras recordadas por cada grupo (variable respuesta).



Pasamos de n_{ij} observaciones por casilla a una observación por casilla.

Para ello, realizamos la media de cada casilla.

| I = 2 J = 5 K = 10 | | FACTOR 2 (Método) J = 5 | | | | | medias por filas |
|--------------------------|---------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| | | Contar | Rimar | Adjetivar | Imaginar | Recordar | |
| Factor 1 (Edad) | Mayores I = 1 | $\bar{y}_{11\bullet} = 7$ | $\bar{y}_{12\bullet} = 6,9$ | $\bar{y}_{13\bullet} = 11$ | $\bar{y}_{14\bullet} = 13,4$ | $\bar{y}_{15\bullet} = 12$ | $\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 10,06$ |
| | Jóvenes I = 2 | $\bar{y}_{21\bullet} = 6,5$ | $\bar{y}_{22\bullet} = 7,6$ | $\bar{y}_{23\bullet} = 14,8$ | $\bar{y}_{24\bullet} = 17,6$ | $\bar{y}_{25\bullet} = 19,3$ | $\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 13,16$ |
| | medias por columnas | $\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 6,75$ | $\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 7,25$ | $\bar{y}_{\bullet 3\bullet} = 12,9$ | $\bar{y}_{\bullet 4\bullet} = 15,5$ | $\bar{y}_{\bullet 5\bullet} = 15,65$ | $\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 11,6$ |

$$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 11,61$$

$$\sigma_{\bullet\bullet\bullet}^2 = 2667,79$$

$$s_{\bullet\bullet\bullet}^2 = 2694,74$$

$$SCT = 2694,74$$

$$SCE(\alpha) = JK \sum_{i=1}^I (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = 5 \cdot 10 \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = 50 \left[(10,06 - 11,61)^2 + (13,16 - 11,61)^2 \right] = 240,25$$

$$SCE(\beta) = IK \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{.j\bullet} - \bar{y}_{...})^2 = SCE(\beta) = 2 \cdot 10 \sum_{j=1}^5 (\bar{y}_{.j\bullet} - \bar{y}_{...})^2 = 20 \left\{ (6,75 - 11,61)^2 + (7,25 - 11,61)^2 + (12,9 - 11,61)^2 + (15,5 - 11,61)^2 + (15,65 - 11,61)^2 \right\} = 1514,94$$

$$SCE(\alpha\beta) = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j\bullet} + \bar{y}_{...})^2 = 10 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j\bullet} + \bar{y}_{...})^2 =$$

$$= 10 \left\{ (7 - 10,06 - 6,75 + 11,61)^2 + (6,5 - 13,16 - 6,75 + 11,61)^2 + (6,9 - 10,6 - 7,25 + 11,61)^2 + \right.$$

$$+ (7,6 - 13,16 - 7,25 + 11,61)^2 + (11 - 10,06 - 12,9 + 11,61)^2 + (14,8 - 13,16 - 12,9 + 11,61)^2 +$$

$$+ (13,4 - 10,06 - 15,5 + 11,61)^2 + (17,6 - 13,16 - 15,5 + 11,61)^2 + (12 - 10,06 - 15,65 + 11,61)^2 +$$

$$\left. + (19,3 - 13,16 - 15,65 + 11,61)^2 \right\} = 10 \cdot 19,03 = 190,3$$

$$SCT = SCR + SCE(\alpha\beta) + SCE(\alpha) + SCE(\beta) \mapsto SCR = SCT - SCE(\alpha\beta) - SCE(\alpha) - SCE(\beta)$$

$$SCR = SCT - SCE(\alpha\beta) - SCE(\alpha) - SCE(\beta) \Rightarrow SCR = 2694,74 - 204,25 - 1514,94 - 190,3 = 785,25$$

TABLA ANOVA: ANÁLISIS ESTADÍSTICO

| Fuente variación | Suma cuadrados | grados libertad | Varianza | Test F |
|---------------------|----------------------------|------------------|---|--|
| Factor (α) | $SCE(\alpha) = 204,25$ | $I - 1 = 1$ | $\hat{S}_\alpha^2 = \frac{240,25}{(I-1)} = 240,25$ | $F_\alpha = \frac{240,25}{8,725} = 27,54$ |
| Factor (β) | $SCE(\beta) = 1514,94$ | $J - 1 = 4$ | $\hat{S}_\beta^2 = \frac{1514,94}{4} = 378,74$ | $F_\beta = \frac{378,74}{8,725} = 43,41$ |
| Interacción | $SCE(\alpha\beta) = 190,3$ | $(I-1)(J-1) = 4$ | $\hat{S}_{\alpha\beta}^2 = \frac{190,3}{4} = 47,58$ | $F_{\alpha\beta} = \frac{47,58}{8,725} = 5,45$ |
| Residual | $SCR = 785,25$ | $IJ(K-1) = 90$ | $\hat{S}_r^2 = \frac{785,25}{90} = 8,725$ | |
| Total | $SCT = 2694,74$ | $IJK - 1 = 99$ | | |

$SCT \equiv 2694,74$ (Variabilidad total de todos los datos)

$SCR \equiv 785,25$ (Variabilidad debida a los factores)

$SCE(\alpha\beta) \equiv 190,3$ (Variabilidad debida a las interacciones)

$SCE(\alpha) \equiv 204,25$ (Variabilidad debida a los distintos niveles del Factor 1)

$SCE(\beta) \equiv 1514,94$ (Variabilidad debida a los distintos niveles del Factor 2)

ANÁLISIS ESTADÍSTICO: Contraste del Efecto de cada factor

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \alpha_i \neq 0$$

EL FACTOR 1 (α) NO INFLUYE

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \beta_j \neq 0$$

EL FACTOR 2 (β) NO INFLUYE

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : \text{Algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

NO HAY INTERACCIONES

ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \alpha_i \neq 0$$

EL FACTOR 1 (α) NO INFLUYE

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$$

$$H_1 : \text{Algún } \beta_j \neq 0$$

EL FACTOR 2 (β) NO INFLUYE

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : \text{Algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

NO HAY INTERACCIONES

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_\alpha = \frac{\hat{S}_\alpha^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (I-1), IJ(K-1)}$$

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_\beta = \frac{\hat{S}_\beta^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (J-1), IJ(K-1)}$$

Se acepta la hipótesis nula cuando:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\hat{S}_{\alpha\beta}^2}{\hat{S}_r^2} \leq F_{\alpha, (I-1)(J-1), IJ(K-1)}$$

$$F_\alpha = \frac{\hat{S}_\alpha^2}{\hat{S}_r^2} = 27,54 > 3,96 = F_{0,05, 1, 90} \quad F_\beta = \frac{\hat{S}_\beta^2}{\hat{S}_r^2} = 43,41 > 2,49 = F_{0,05, 4, 90}$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\hat{S}_{\alpha\beta}^2}{\hat{S}_r^2} = 5,45 > 2,49 = F_{0,05, 4, 90}$$

Se rechazan todas las hipótesis nulas. En consecuencia, influyen los factores.



Al introducir los datos en el SPSS

memoria-anova2-itera.sav - SPSS Editor de datos

Archivo Edición Ver Datos Transformar **Analizar** Gráficos Utilidades Ventana ?

120 : Palabras

| | Palabras | Edad | Método |
|----|----------|------|--------|
| 1 | 9,00 | 1,00 | 1,00 |
| 2 | 8,00 | 1,00 | 1,00 |
| 3 | 6,00 | 1,00 | 1,00 |
| 4 | 8,00 | 1,00 | 1,00 |
| 5 | 10,00 | 1,00 | 1,00 |
| 6 | 4,00 | 1,00 | 1,00 |
| 7 | 6,00 | 1,00 | 1,00 |
| 8 | 5,00 | 1,00 | 1,00 |
| 9 | 7,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 7,00 | 1,00 | 1,00 |
| 11 | 8,00 | 2,00 | 1,00 |
| 12 | 6,00 | 2,00 | 1,00 |
| 13 | 4,00 | 2,00 | 1,00 |
| 14 | 6,00 | 2,00 | 1,00 |
| 15 | 7,00 | 2,00 | 1,00 |
| 16 | 6,00 | 2,00 | 1,00 |
| 17 | 5,00 | 2,00 | 1,00 |
| 18 | 7,00 | 2,00 | 1,00 |
| 19 | 9,00 | 2,00 | 1,00 |
| 20 | 7,00 | 2,00 | 1,00 |
| 21 | 7,00 | 1,00 | 2,00 |
| 22 | 9,00 | 1,00 | 2,00 |
| 23 | 6,00 | 1,00 | 2,00 |
| 24 | 6,00 | 1,00 | 2,00 |

Analizar

- Informes
- Estadísticos descriptivos
- Tablas
- Comparar medias
- Modelo lineal general**
 - Univariante...
 - Multivariante...
 - Medidas repetidas...
 - Componentes de la varianza...
- Modelos mixtos
- Correlaciones
- Regresión
- Loglineal
- Clasificar
- Reducción de datos
- Escalas
- Pruebas no paramétricas
- Series temporales
- Supervivencia
- Respuesta múltiple
- Análisis de valores perdidos...
- Muestras complejas

memoria-anova2-itera.sav - SPSS Editor de datos

Archivo Edición Ver Datos Transformar **Analizar** Gráficos

1 : Palabras 9

| | Palabras | Edad | Método | var |
|----|----------|------|--------|-----|
| 25 | 6,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 26 | 11,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 27 | 6,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 28 | 3,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 29 | 8,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 30 | 7,00 | 1,00 | 2,00 | |
| 31 | 10,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 32 | 7,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 33 | 8,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 34 | 10,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 35 | 4,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 36 | 7,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 37 | 10,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 38 | 6,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 39 | 7,00 | 2,00 | 2,00 | |
| 40 | 13,00 | 1,00 | 2,00 | |

Vista de datos / Vista de variables

SPSS El procesador está p...

Vista de datos / Vista de variables

memoria-anova2-itera.sav - SPSS Editor de datos

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

Informes
Estadísticos descriptivos
Tablas
Comparar medias
Modelo lineal general
Univariante...

Opciones

Depende de: Palabras

Factores fijos: Edad Método

Factores aleatorios:

Covariables:

Ponderación MCP:

Restablecer Cancelar Ayuda

Univariante: Opciones

Medias marginales estimadas

Factores e interacciones de los factores: (GLOBAL) Edad Método Edad*Método

Mostrar las medias para: Edad Método

Comparar los efectos principales

Ajuste del intervalo de confianza: Bonferroni

Mostrar

- Estadísticos descriptivos
- Estimaciones del tamaño del efecto
- Potencia observada
- Estimaciones de los parámetros
- Matriz de coeficientes de contraste
- Pruebas de homogeneidad
- Diagramas de dispersión x nivel
- Gráfico de los residuos
- Falta de ajuste
- Función estimable general

Nivel de significación: .05 Los intervalos de confianza son del 95%

Continuar Cancelar Ayuda

| | | | |
|----|------|------|------|
| 18 | 7,00 | 2,00 | 1,00 |
| 19 | 9,00 | 2,00 | 1,00 |
| 20 | 7,00 | 2,00 | 1,00 |
| 21 | 7,00 | 1,00 | 2,00 |
| 22 | 9,00 | 1,00 | 2,00 |
| 23 | 6,00 | 1,00 | 2,00 |
| 24 | 6,00 | 1,00 | 2,00 |

Vista de datos Vista de variables

SPSS El procesador está preparado



Estadísticos descriptivos

Variable dependiente: Palabras

| Edad | Método | Media | Desv. típ. | N |
|-------|--------|---------|------------|---------|
| 1,00 | 1,00 | 7,0000 | 1,82574 | 10 |
| | 2,00 | 6,9000 | 2,13177 | 10 |
| | 3,00 | 11,0000 | 2,49444 | 10 |
| | 4,00 | 13,4000 | 4,50185 | 10 |
| | 5,00 | 12,0000 | 3,74166 | 10 |
| | Total | | 10,0600 | 4,00719 |
| 2,00 | 1,00 | 6,5000 | 1,43372 | 10 |
| | 2,00 | 7,6000 | 1,95505 | 10 |
| | 3,00 | 14,8000 | 3,48967 | 10 |
| | 4,00 | 17,6000 | 2,59058 | 10 |
| | 5,00 | 19,3000 | 2,66875 | 10 |
| | Total | | 13,1600 | 5,78654 |
| Total | 1,00 | 6,7500 | 1,61815 | 20 |
| | 2,00 | 7,2500 | 2,02290 | 20 |
| | 3,00 | 12,9000 | 3,53777 | 20 |
| | 4,00 | 15,5000 | 4,17385 | 20 |
| | 5,00 | 15,6500 | 4,90193 | 20 |
| | Total | | 11,6100 | 5,19109 |

Medias marginales estimadas

1. Edad

Estimaciones

Variable dependiente: Palabras

| Edad | Media | Error típ. | Intervalo de confianza al 95%. | |
|------|--------|------------|--------------------------------|-----------------|
| | | | Límite inferior | Límite superior |
| 1,00 | 10,060 | ,401 | 9,264 | 10,856 |
| 2,00 | 13,160 | ,401 | 12,364 | 13,956 |

2. Método

Estimaciones

Variable dependiente: Palabras

| Método | Media | Error típ. | Intervalo de confianza al 95%. | |
|--------|--------|------------|--------------------------------|-----------------|
| | | | Límite inferior | Límite superior |
| 1,00 | 6,750 | ,633 | 5,492 | 8,008 |
| 2,00 | 7,250 | ,633 | 5,992 | 8,508 |
| 3,00 | 12,900 | ,633 | 11,642 | 14,158 |
| 4,00 | 15,500 | ,633 | 14,242 | 16,758 |
| 5,00 | 15,650 | ,633 | 14,392 | 16,908 |

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: Palabras

| Fuente | Suma de cuadrados tipo III | gl | Media cuadrática | F | Significación |
|------------------|----------------------------|-----|------------------|----------|---------------|
| Modelo corregido | 1945,490 ^a | 9 | 216,166 | 26,935 | ,000 |
| Intersección | 13479,210 | 1 | 13479,210 | 1679,536 | ,000 |
| Edad | 240,250 | 1 | 240,250 | 29,936 | ,000 |
| Método | 1514,940 | 4 | 378,735 | 47,191 | ,000 |
| Edad * Método | 190,300 | 4 | 47,575 | 5,928 | ,000 |
| Error | 722,300 | 90 | 8,026 | | |
| Total | 16147,000 | 100 | | | |
| Total corregida | 2667,790 | 99 | | | |

a. R cuadrado = ,729 (R cuadrado corregida = ,702)

Estadísticos descriptivos

Variable dependiente: Palabras

| Edad | Método | Media | Desv. típ. | N |
|-------|--------|---------|------------|---------|
| 1,00 | 1,00 | 7,0000 | 1,82574 | 10 |
| | 2,00 | 6,9000 | 2,13177 | 10 |
| | 3,00 | 11,0000 | 2,49444 | 10 |
| | 4,00 | 13,4000 | 4,50185 | 10 |
| | 5,00 | 12,0000 | 3,74166 | 10 |
| | Total | | 10,0600 | 4,00719 |
| 2,00 | 1,00 | 6,5000 | 1,43372 | 10 |
| | 2,00 | 7,6000 | 1,95505 | 10 |
| | 3,00 | 14,8000 | 3,48967 | 10 |
| | 4,00 | 17,6000 | 2,59058 | 10 |
| | 5,00 | 19,3000 | 2,66875 | 10 |
| | Total | | 13,1600 | 5,78654 |
| Total | 1,00 | 6,7500 | 1,61815 | 20 |
| | 2,00 | 7,2500 | 2,02290 | 20 |
| | 3,00 | 12,9000 | 3,53777 | 20 |
| | 4,00 | 15,5000 | 4,17385 | 20 |
| | 5,00 | 15,6500 | 4,90193 | 20 |
| | Total | | 11,6100 | 5,19109 |

Medias marginales estimadas

1. Edad

Estimaciones

Variable dependiente: Palabras

| Edad | Media | Error típ. | Intervalo de confianza al 95%. | |
|------|--------|------------|--------------------------------|-----------------|
| | | | Límite inferior | Límite superior |
| 1,00 | 10,060 | ,401 | 9,264 | 10,856 |
| 2,00 | 13,160 | ,401 | 12,364 | 13,956 |

2. Método

Estimaciones

Variable dependiente: Palabras

| Método | Media | Error típ. | Intervalo de confianza al 95%. | |
|--------|--------|------------|--------------------------------|-----------------|
| | | | Límite inferior | Límite superior |
| 1,00 | 6,750 | ,633 | 5,492 | 8,008 |
| 2,00 | 7,250 | ,633 | 5,992 | 8,508 |
| 3,00 | 12,900 | ,633 | 11,642 | 14,158 |
| 4,00 | 15,500 | ,633 | 14,242 | 16,758 |
| 5,00 | 15,650 | ,633 | 14,392 | 16,908 |

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: Palabras

| Fuente | Suma de cuadrados tipo III | gl | Media cuadrática | F | Significación |
|------------------|----------------------------|-----|------------------|----------|---------------|
| Modelo corregido | 1945,490 ^a | 9 | 216,166 | 26,935 | ,000 |
| Intersección | 13479,210 | 1 | 13479,210 | 1679,536 | ,000 |
| Edad | 240,250 | 1 | 240,250 | 29,936 | ,000 |
| Método | 1514,940 | 4 | 378,735 | 47,191 | ,000 |
| Edad * Método | 190,300 | 4 | 47,575 | 5,928 | ,000 |
| Error | 722,300 | 90 | 8,026 | | |
| Total | 16147,000 | 100 | | | |
| Total corregida | 2667,790 | 99 | | | |

a. R cuadrado = ,729 (R cuadrado corregida = ,702)



Al comparar simultáneamente la diferencia de medias por el Test de Carlo Emilio Bonferroni, con un nivel de confianza del 95%

Comparaciones por pares

Variable dependiente: Palabras

| (I) Método | (J) Método | Diferencia entre medias (I-J) | Error típ. | Significación ^a | Intervalo de confianza al 95% para diferencia ^a | |
|------------|------------|-------------------------------|------------|----------------------------|--|-----------------|
| | | | | | Límite inferior | Límite superior |
| 1,00 | 2,00 | -,500 | ,896 | 1,000 | ▲ -3,078 | 2,078 |
| | 3,00 | -6,150* | ,896 | ,000 | -8,728 | -3,572 |
| | 4,00 | -8,750* | ,896 | ,000 | -11,328 | -6,172 |
| | 5,00 | -8,900* | ,896 | ,000 | -11,478 | -6,322 |
| 2,00 | 1,00 | ,500 | ,896 | 1,000 | ▲ -2,078 | 3,078 |
| | 3,00 | -5,650* | ,896 | ,000 | -8,228 | -3,072 |
| | 4,00 | -8,250* | ,896 | ,000 | -10,828 | -5,672 |
| | 5,00 | -8,400* | ,896 | ,000 | -10,978 | -5,822 |
| 3,00 | 1,00 | 6,150* | ,896 | ,000 | 3,572 | 8,728 |
| | 2,00 | 5,650* | ,896 | ,000 | 3,072 | 8,228 |
| | 4,00 | -2,600* | ,896 | ,047 | -5,178 | -,022 |
| | 5,00 | -2,750* | ,896 | ,028 | -5,328 | -,172 |
| 4,00 | 1,00 | 8,750* | ,896 | ,000 | 6,172 | 11,328 |
| | 2,00 | 8,250* | ,896 | ,000 | 5,672 | 10,828 |
| | 3,00 | 2,600* | ,896 | ,047 | ,022 | 5,178 |
| | 5,00 | -,150 | ,896 | 1,000 | ▲ -2,728 | 2,428 |
| 5,00 | 1,00 | 8,900* | ,896 | ,000 | 6,322 | 11,478 |
| | 2,00 | 8,400* | ,896 | ,000 | 5,822 | 10,978 |
| | 3,00 | 2,750* | ,896 | ,028 | ,172 | 5,328 |
| | 4,00 | ,150 | ,896 | 1,000 | ▲ -2,428 | 2,728 |

Basadas en las medias marginales estimadas.

*. La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Se verifica que la diferencia de medias es significativa, con una significación de 0,05



Para cambiar el tipo de variable

palabras-anova2.sav - SPSS Editor de datos

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

| | Nombre | Tipo | Anchura | Decimales | Etiqueta | Valores | Perdidos | Columnas | Alineación | Medida |
|---|----------|----------|---------|-----------|----------|---------|----------|----------|------------|---------|
| 1 | Palabras | Numérico | 8 | 2 | | Ninguno | Ninguno | 7 | Derecha | Escala |
| 2 | Edad | Cadena | 8 | 0 | | Ninguno | Ninguno | 8 | Izquierda | Nominal |
| 3 | Método | Cadena | 9 | 0 | | Ninguno | Ninguno | 8 | Izquierda | Nominal |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |

Vista de datos Vista de variables

palabras-anova2.sav - SPSS Editor de datos

Archivo Edición Ver Datos Transformar **Analizar** Gráficos Utilidades Ventana ?

- Informes
- Estadísticos descriptivos
- Tablas
- Comparar medias
- Modelo lineal general
 - Univariante...**
 - Multivariante...
 - Medidas repetidas...
 - Componentes de la varianza...
- Modelos mixtos
- Correlaciones
- Regresión
- Loglineal
- Clasificar
- Reducción de datos
- Escalas
- Pruebas no paramétricas
- Series temporales
- Supervivencia
- Respuesta múltiple
- Análisis de valores perdidos...
- Muestras complejas

Modelo...
Contrastes...
Gráficos...
Post hoc...
Guardar...
Opciones...
Cancelar Ayuda

SPSS El procesador está preparado

Univariante

Univariante: Opciones

Medias marginales estimadas

Factores e interacciones de los factores: (GLOBAL)
Edad
Método
Edad*Método

Mostrar las medias para:
Edad
Método

Comparar los efectos principales

Ajuste del intervalo de confianza:
Bonferroni

Mostrar

| | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> Estadísticos descriptivos | <input type="checkbox"/> Pruebas de homogeneidad |
| <input type="checkbox"/> Estimaciones del tamaño del efecto | <input type="checkbox"/> Diagramas de dispersión x nivel |
| <input type="checkbox"/> Potencia observada | <input type="checkbox"/> Gráfico de los residuos |
| <input type="checkbox"/> Estimaciones de los parámetros | <input type="checkbox"/> Falta de ajuste |
| <input type="checkbox"/> Matriz de coeficientes de contraste | <input type="checkbox"/> Función estimable general |

Nivel de significación: .05 Los intervalos de confianza son del 95%

Continuar Cancelar Ayuda



Comparaciones por pares

Variable dependiente: Palabras

| (I) Método | (J) Método | Diferencia entre medias (I-J) | Error típ. | Significación ^a | Intervalo de confianza al 95 % para diferencia ^a | |
|------------|------------|-------------------------------|------------|----------------------------|---|-----------------|
| | | | | | Límite inferior | Límite superior |
| Adjetivar | Contar | 6,150* | ,896 | ,000 | 3,572 | 8,728 |
| | Imaginar | -2,600* | ,896 | ,047 | -5,178 | -,022 |
| | Recordar | -2,750* | ,896 | ,028 | -5,328 | -,172 |
| | Rimar | 5,650* | ,896 | ,000 | 3,072 | 8,228 |
| Contar | Adjetivar | -6,150* | ,896 | ,000 | -8,728 | -3,572 |
| | Imaginar | -8,750* | ,896 | ,000 | -11,328 | -6,172 |
| | Recordar | -8,900* | ,896 | ,000 | -11,478 | -6,322 |
| | Rimar | -,500 | ,896 | 1,000 | -3,078 | 2,078 |
| Imaginar | Adjetivar | 2,600* | ,896 | ,047 | ,022 | 5,178 |
| | Contar | 8,750* | ,896 | ,000 | 6,172 | 11,328 |
| | Recordar | -,150 | ,896 | 1,000 | -2,728 | 2,428 |
| | Rimar | 8,250* | ,896 | ,000 | 5,672 | 10,828 |
| Recordar | Adjetivar | 2,750* | ,896 | ,028 | ,172 | 5,328 |
| | Contar | 8,900* | ,896 | ,000 | 6,322 | 11,478 |
| | Imaginar | ,150 | ,896 | 1,000 | -2,428 | 2,728 |
| | Rimar | 8,400* | ,896 | ,000 | 5,822 | 10,978 |
| Rimar | Adjetivar | -5,650* | ,896 | ,000 | -8,228 | -3,072 |
| | Contar | ,500 | ,896 | 1,000 | -2,078 | 3,078 |
| | Imaginar | -8,250* | ,896 | ,000 | -10,828 | -5,672 |
| | Recordar | -8,400* | ,896 | ,000 | -10,978 | -5,822 |

Basadas en las medias marginales estimadas.

*. La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a. Ajuste para comparaciones múltiples: Bonferroni.

Santiago De la Fuente Fernández

Departamento de Matemáticas

Tif.: +34-914973023

e-mail: santiago.delafuente@uam.es





Estadística Ciencias Ambientales
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

