Grado Administración y Gestión
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

# ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL

# TABLAS DE FRECUENCIAS - MEDIDAS DE POSICIÓN

| $x_i$ | $n_i$ | $N_i$ | $f_i = n_i / N$ | $F_i = N_i / N$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 0,05 | 0,05 |
| 2 | 6 | 8 | 0,15 | 0,2 |
| 3 | 10 | 18 | 0,25 | 0,45 |
| 4 | 5 | 23 | 0,125 | 0,575 |
| 5 | 10 | 33 | 0,25 | 0,825 |
| 6 | 3 | 36 | 0,075 | 0,9 |
| 7 | 2 | 38 | 0,05 | 0,95 |
| 8 | 2 | 40 | 0,05 | 1 |
| | $N = \sum_{i=1}^{8} n_i = 40$ | | $\sum_{i=1}^{8} f_i = 1$ | |

$\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$\frac{3.N}{4} = \frac{3.40}{4} = 30$

$\frac{95.N}{100} = \frac{95.40}{100} = 38$

Frecuencia absoluta ($n_i$): Número de veces que se repite el dato $x_i$

Frecuencia absoluta acumulada: $N_i$

Frecuencia relativa: $f_i = n_i / N$

Frecuencia relativa acumulada: $F_i = N_i / N$

Mediana: Se divide el número de datos entre dos ($N/2$), se va a la columna $N_i$ (frecuencia absoluta acumulada), si el dato se encuentra allí, la MEDIANA es el valor de la $x_i$ correspondiente. Si el valor ($N/2$) no se encuentra en la columna $N_i$, la MEDIANA es el valor de la $x_i$ correspondiente a la $N_i$ inmediata superior (ordenada). Se denota por $M_e$

Mediana: $M_e = 4$

Cuartiles ($Q_k$): El Cuartil $k-$ésimo se calcula de forma similar a la mediana $M_e$, aunque el cálculo se hace sobre ($k.N/4$), donde $k = 1, 2, 3, 4$

Tercer Cuartil: $Q_3 = 5$

Percentiles ($P_k$): El Percentil $k-$ésimo se calcula de forma similar a la mediana $M_e$, aunque el cálculo se hace sobre ($k.N/100$), donde $k = 1, 2, \cdots, 100$

Percentil 95: $P_{95} = 7$

Recorrido: La diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una variable.

$R = \text{máx}(x_i) - \text{mín}(x_i) = 8 - 1 = 7$

Recorrido Intercuartílico: Diferencia entre el tercer cuartil $(Q_3)$ y el primer cuartil $(Q_1)$

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 5 - 3 = 2$$

Recorrido Semiintercuartílico: La mitad del recorrido intercuartílico. $R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

**REPRESENTACIONES GRÁFICAS**

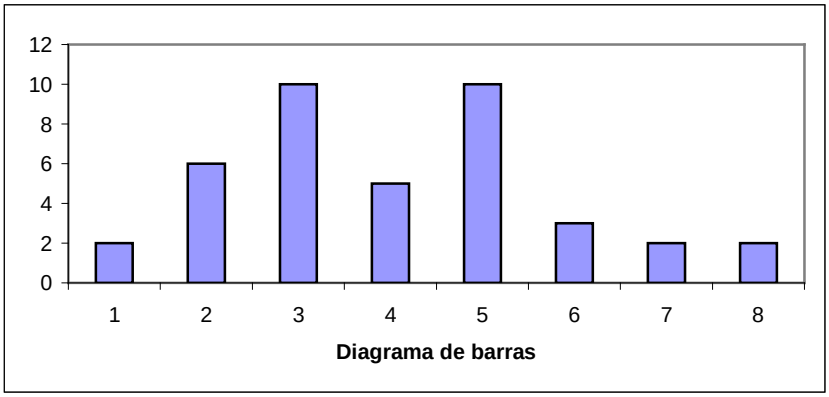
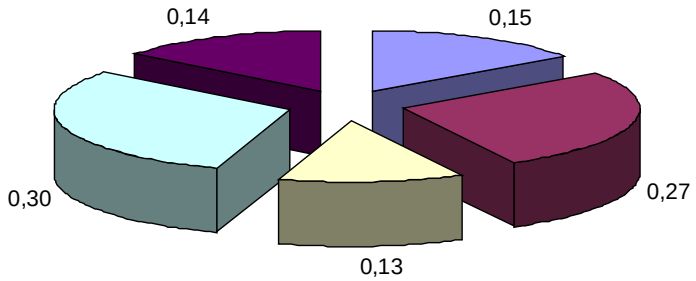



DIAGRAMA DE SECTORES

| Carreras | Alumnos | Fr.relativa | Grados Sector |
|---|---|---|---|
| Matemáticas | 2136 | 0,15 | 54,06 |
| Filosofía | 3870 | 0,27 | 97,95 |
| Derecho | 1830 | 0,13 | 46,32 |
| Económicas | 4328 | 0,30 | 109,54 |
| Químicas | 2060 | 0,14 | 52,14 |
| | 14224 | 1 | 360 |



## MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

A veces conviene reducir la información obtenida a un solo valor o a un número pequeño de valores para facilitar la comparación entre distintas muestras o poblaciones. Estos *valores que de alguna forma centralizan la información, reciben el nombre de medidas de tendencia central*.

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i.n_i$ | $x_i^2.n_i$ | $\frac{n_i}{x_i}$ | $\log x_i$ | $n_i.\log x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 6 | 12 | 24 | 3 | 0,301 | 1,806 |
| 3 | 10 | 30 | 90 | 3,333 | 0,477 | 4,771 |
| 4 | 5 | 20 | 80 | 1,250 | 0,602 | 3,010 |
| 5 | 10 | 50 | 250 | 2 | 0,699 | 6,990 |
| 6 | 3 | 18 | 108 | 0,500 | 0,778 | 2,334 |
| 7 | 2 | 14 | 98 | 0,286 | 0,845 | 1,690 |
| 8 | 2 | 16 | 128 | 0,250 | 0,903 | 1,806 |
| | 40 | 162 | 780 | 12,619 | 4,606 | 22,408 |

Media Aritmética: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i.n_i}{N} = \dfrac{162}{40} = 4,05$

Media Armónica: $\bar{x}_A = \dfrac{N}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \cdots + \frac{n_8}{x_8}} = \dfrac{N}{\sum_{i=1}^{8} \frac{n_i}{x_i}} = \dfrac{40}{12,619} = 3,17$

La relación entre las medias es: $\bar{x}_A \le \bar{x}_G \le \bar{x} \leftrightarrow 3,17 \le 3,63 \le 4,05$

Cuando el valor de $x_i = 0$ la media armónica no tiene sentido.

Media Geométrica:

$$\bar{x}_G = \sqrt[40]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}\cdots x_8^{n_8}} \mapsto \log \bar{x}_G = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{8}(n_i.\log x_i) = \frac{1}{40}(22,408) = 0,5602$$

$$\log \bar{x}_G = 0,5602 \mapsto \bar{x}_G = 10^{0,5602} = 3,63$$

**PROPIEDADES DE LA MEDIA ARITMÉTICA**

CAMBIO DE ORIGEN

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i . n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 10 | 30 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 10 | 50 |
| 6 | 3 | 18 |
| 7 | 2 | 14 |
| 8 | 2 | 16 |
| | 40 | 162 |

| $x_i + 3$ | $n_i$ | $(x_i + 3).n_i$ |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 8 |
| 5 | 6 | 30 |
| 6 | 10 | 60 |
| 7 | 5 | 35 |
| 8 | 10 | 80 |
| 9 | 3 | 27 |
| 10 | 2 | 20 |
| 11 | 2 | 22 |
| | 40 | 282 |

CAMBIO DE ESCALA

| $4.x_i$ | $n_i$ | $4.x_i . n_i$ |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 48 |
| 12 | 10 | 120 |
| 16 | 5 | 80 |
| 20 | 10 | 200 |
| 24 | 3 | 72 |
| 28 | 2 | 56 |
| 32 | 2 | 64 |
| | 40 | 648 |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i . n_i}{N} = \frac{162}{40} = 4{,}05 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i + 3).n_i}{N} = \frac{282}{40} = 7{,}05 = (4{,}05 + 3) = \bar{x} + 3$$

Si se produce un cambio de origen (b), la media aritmética $(\bar{x})$ se ve afectada en la medida en que se produce el cambio, es decir, $(\bar{x} + b)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i + b).n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{k} b.n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{N} + \frac{b.\sum_{i=1}^{k} n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{N} + b = \bar{x} + b$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} (4.x_i).n_i}{40} = \frac{648}{40} = 16{,}2 = 4.(4{,}05) = 4\bar{x}$$

Si se produce un cambio de escala (c), la media aritmética $(\bar{x})$ se ve afectada en la medida en que se produce el cambio, es decir, $(c.\bar{x})$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (c.x_i).n_i}{N} \quad \frac{c.\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{N} = c.\bar{x}$$

CAMBIO DE ORIGEN Y DE ESCALA

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i . n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 10 | 30 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 10 | 50 |
| 6 | 3 | 18 |
| 7 | 2 | 14 |
| 8 | 2 | 16 |
| | 40 | 162 |

| $4.x_i + 3$ | $n_i$ | $(4.x_i + 3).n_i$ |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 14 |
| 11 | 6 | 66 |
| 15 | 10 | 150 |
| 19 | 5 | 95 |
| 23 | 10 | 230 |
| 27 | 3 | 81 |
| 31 | 2 | 62 |
| 35 | 2 | 70 |
| | 40 | 768 |

$$\frac{\sum_{i=1}^{8}(4.x_i+3).n_i}{N} = \frac{768}{40} = 19{,}2 = 4.(4{,}05)+3 = 4.\bar{x}+3$$

Si se produce simultáneamente un cambio de origen (b) y de escala (c) en los datos, estos afectan de igual medida a la media aritmética, es decir, $(c.\bar{x}+b)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(c.x_i+b).n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c.x_i.n_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{k} b.n_i}{N} = \frac{c.\sum_{i=1}^{k} x_i.n_i}{N} + \frac{b.\sum_{i=1}^{k} n_i}{N} = c.\bar{x}+b$$

## MOMENTOS

Un momento de orden r respecto al parámetro c, se define: $M_r(c) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - c)^r . n_i}{N}$

En particular, interesan dos casos:

- Momentos respecto al origen $(c = 0)$: $a_r = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - 0)^r . n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^r . n_i}{N}$
- Momentos respecto a la media $(c = \bar{x})$: $m_r = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^r . n_i}{N}$

MOMENTOS RESPECTO AL ORIGEN

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i . n_i$ | $x_i^2 . n_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 6 | 12 | 24 |
| 3 | 10 | 30 | 90 |
| 4 | 5 | 20 | 80 |
| 5 | 10 | 50 | 250 |
| 6 | 3 | 18 | 108 |
| 7 | 2 | 14 | 98 |
| 8 | 2 | 16 | 128 |
| | 40 | 162 | 780 |

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^0 . n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_i}{N} = \frac{40}{40} = 1$$

$$a_1 = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i . n_i}{N} = \frac{162}{40} = 4{,}05$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 . n_i}{N} = \frac{780}{40} = 19{,}5$$

MOMENTOS RESPECTO A LA MEDIA ($\bar{x} = 4{,}05$)

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i . n_i$ | $x_i^2 . n_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x}) . n_i$ | $(x_i - \bar{x})^2 . n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | -3,05 | 9,303 | -6,1 | 18,605 |
| 2 | 6 | 12 | 24 | -2,05 | 4,203 | -12,3 | 25,215 |
| 3 | 10 | 30 | 90 | -1,05 | 1,103 | -10,5 | 11,025 |
| 4 | 5 | 20 | 80 | -0,05 | 0,002 | -0,25 | 0,012 |
| 5 | 10 | 50 | 250 | 0,95 | 0,903 | 9,5 | 9,025 |
| 6 | 3 | 18 | 108 | 1,95 | 3,803 | 5,85 | 11,408 |
| 7 | 2 | 14 | 98 | 2,95 | 8,703 | 5,9 | 17,405 |
| 8 | 2 | 16 | 128 | 3,95 | 15,603 | 7,9 | 31,205 |
| | 40 | 162 | 780 | | | 0 | 123,9 |

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^0 . n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_i}{N} = \frac{40}{40} = 1 \qquad m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^1 . n_i}{N} = \frac{0}{40} = 0$$

$$m_2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 . n_i}{N} = \frac{123{,}9}{40} = 3{,}0975 \text{ (varianza)}$$

La varianza también se puede expresar: $\boxed{m_2 = s^2 = a_2 - (a_1)^2 = a_2 - (\bar{x})^2}$

en efecto, $m_2 = s^2 = 3{,}0975 = 19{,}5 - (4{,}05)^2$

$$m_2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 . n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i^2 - 2 x_i \bar{x} + \bar{x}^2) . n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 . n_i - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{k} x_i . n_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{k} n_i}{N} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 . n_i}{N} - 2\bar{x} . \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}{N} + \bar{x}^2 . \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{N} = a_2 - 2 . \bar{x} . \bar{x} + \bar{x}^2 = a_2 - \bar{x}^2 = a_2 - a_1^2$$

## MEDIDAS DE DISPERSIÓN O CONCENTRACIÓN

Las medidas de tendencia central reducen la información de una muestra a un solo valor, pero, en algunos casos, éste valor estará más próximo a la realidad de las observaciones que en otros. Las medidas de dispersión o concentración se encargan de cuantificar la representatividad de estos valores centrales. Resaltar que los términos concentración y dispersión pueden ser utilizados indistintamente, se observa la relación:

alta dispersión $\leftrightarrow$ baja concentración  baja dispersión $\leftrightarrow$ alta concentración

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i.n_i$ | $x_i^2.n_i$ | $\lvert x_i-\overline{x}\rvert$ | $\lvert x_i-\overline{x}\rvert.n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 3,05 | 6,1 |
| 2 | 6 | 12 | 24 | 2,05 | 12,3 |
| 3 | 10 | 30 | 90 | 1,05 | 10,5 |
| 4 | 5 | 20 | 80 | 0,05 | 0,25 |
| 5 | 10 | 50 | 250 | 0,95 | 9,5 |
| 6 | 3 | 18 | 108 | 1,95 | 5,85 |
| 7 | 2 | 14 | 98 | 2,95 | 5,9 |
| 8 | 2 | 16 | 128 | 3,95 | 7,9 |
| | 40 | 162 | 780 | | 58,3 |

$$a_1 = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i.n_i}{N} = \frac{162}{40} = 4,05$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2.n_i}{N} = \frac{780}{40} = 19,5$$

$$\sigma^2 = a_2 - (a_1)^2 = 19,5 - (4,05)^2 = 3,0975$$

$$\sigma = \sqrt{3,0975} = 1,76$$

La varianza $\sigma^2$ también se define: $m_2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2 . n_i}{N}$, al ser suma de cuadrados tomará siempre valores positivos. En el caso que $s^2 = 0$ se entiende que todos los $x_i$ coinciden con la media aritmética $\overline{x}$, es decir, todas las observaciones están concentradas en un mismo punto, por lo que la dispersión es mínima (nula).

Señalar que la varianza no se suele utilizar como medida de representatividad de la media aritmética por estar expresada en unidades al cuadrado. Para ello, se utiliza la desviación típica (raíz cuadrada positiva de la varianza).

Desviación típica: $s = +\sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2 . n_i}{N}} = \sqrt{a_2 - (a_1)^2}$

Desviación media: $DM_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{8}\lvert x_i-\overline{x}\rvert.n_i}{N} = \frac{58,3}{40} = 1,4575$

Las medidas de dispersión utilizadas hasta ahora vienen expresadas en números concretos (unidades en las que viene medida la variable); por tanto, no son útiles para los casos en que deseamos establecer una comparación entre las dispersiones de dos muestras que vengan expresadas en distintas unidades.

En este caso hay que recurrir a medias de dispersión en números abstractos, independientes de la heterogeneidad de las unidades observadas.

- Coeficiente de Variación de Pearson: $C.V = \frac{s}{\bar{x}}$

  Adviértase que este coeficiente no tiene sentido cuando $\bar{x} = 0$. A veces se multiplica por 100, para mayor comodidad en el manejo de las cifras, trabajando en porcentajes.

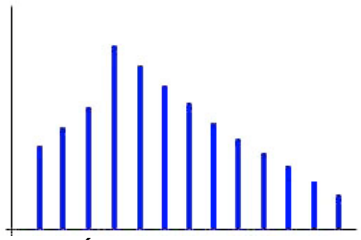
en nuestro caso, $C.V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,76}{4,05} = 0,4346$ (43,46%)

- Coeficiente de Variación Media: $CVM_{\bar{x}} = \frac{DM_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} = \frac{1,4575}{4,05} = 0,36$

  Señalar que no tiene sentido cuando $\bar{x} = 0$, o bien cuando es negativo.

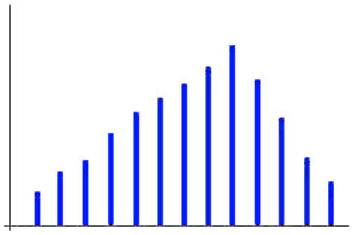
## MEDIDAS DE ASIMETRIA Y APUNTAMIENTO

Una distribución de frecuencias es simétrica cuando los valores de la variable equidistantes de un valor central tienen las mismas frecuencias. En este caso, $\boxed{\bar{x} = M_e = M_d}$. Las distribuciones que no son simétricas presentan una asimetría a la derecha o a la izquierda.



ASIMETRÍA DERECHA O POSITIVA

Desciende más lentamente por la derecha que por la izquierda: $\boxed{\bar{x} \geq M_e \geq M_d}$



ASIMETRÍA IZQUIERDA O NEGATIVA

Desciende más lentamente por la izquierda que por la derecha: $\boxed{\bar{x} \leq M_e \leq M_d}$

### COEFICIENTE DE ASIMETRÍA DE PEARSON

$$A_P = \frac{\bar{x} - M_d}{s} \begin{cases} A_P > 0 & \text{Asimetría a la derecha o positiva} \\ A_P = 0 & \text{Simetría} \\ A_P < 0 & \text{Asimetría a la izquierda o negativa} \end{cases}$$

Este coeficiente tiene sentido cuando la moda es única

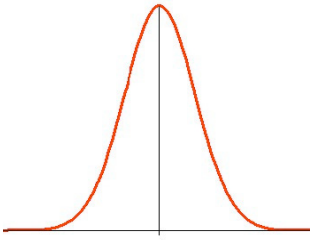
**COEFICIENTE DE ASIMETRÍA DE FISHER**: $g_1 = \frac{m_3}{s^3} \begin{cases} g_1 > 0 & \text{Asimetría a la derecha o positiva} \\ g_1 = 0 & \text{Simetría} \\ g_1 < 0 & \text{Asimetría a la izquierda o negativa} \end{cases}$

**COEF. ASIMETRÍA DE BOWLEY**: (basado en la posición de los cuartiles y la mediana)

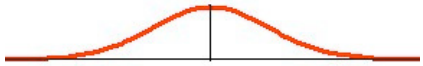
$$A_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 + Q_1} \begin{cases} A_B > 0 & \text{Asimetría a la derecha o positiva} \\ A_B = 0 & \text{Simetría} \\ A_B < 0 & \text{Asimetría a la izquierda o negativa} \end{cases}$$

## APUNTAMIENTO O CURTOSIS

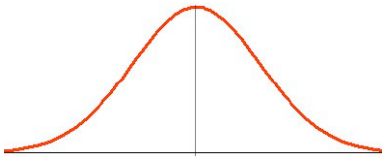
La curtosis de una distribución de frecuencias es el apuntamiento que presenta el polígono de frecuencias alrededor de la media. Si está muy apuntado diremos que la distribución es **Leptocúrtica**, si poco apuntado **Platicúrtica**, y si el apuntamiento es intermedio **Mesocúrtica** (igual apuntamiento que la normal).



Leptocúrtica



Platicúrtica



Mesocúrtica

**COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO O DE CURTOSIS**:

$$g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3 \begin{cases} g_2 > 0 \rightarrow \text{LEPTOCÚRTICA (más apuntamiento que la normal)} \\ g_2 = 0 \rightarrow \text{MESOCÚRTICA (igual apuntamiento que la normal)} \\ g_2 < 0 \rightarrow \text{PLATICÚRTICA (menor apuntamiento que la normal)} \end{cases}$$

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i . n_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 . n_i$ | $(x_i - \bar{x})^3 . n_i$ | $(x_i - \bar{x})^4 . n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | -3,05 | 9,303 | 18,605 | -56,745 | 173,073 |
| 2 | 6 | 12 | -2,05 | 4,203 | 25,215 | -51,691 | 105,966 |
| 3 | 10 | 30 | -1,05 | 1,103 | 11,025 | -11,576 | 12,155 |
| 4 | 5 | 20 | -0,05 | 0,002 | 0,012 | -0,001 | 0 |
| 5 | 10 | 50 | 0,95 | 0,903 | 9,025 | 8,574 | 8,145 |
| 6 | 3 | 18 | 1,95 | 3,803 | 11,408 | 22,245 | 43,377 |
| 7 | 2 | 14 | 2,95 | 8,703 | 17,405 | 51,345 | 151,467 |
| 8 | 2 | 16 | 3,95 | 15,603 | 31,205 | 123,260 | 486,876 |
| | 40 | 162 | | | 123,9 | 85,410 | 981,059 |

$$m_2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 . n_i}{N} = \frac{123,9}{40} = 3,0975 \text{ (varianza)} \qquad s = \sqrt{3,0975} = 1,76 \text{ (desviación típica)}$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^3 . n_i}{N} = \frac{85,41}{40} = 2,135 \qquad m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^4 . n_i}{N} = \frac{981,059}{40} = 24,526$$

- Coeficiente de asimetría de Pearson: No tiene sentido porque no hay única moda.
- Coeficiente de asimetría de Fisher: $g_1 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{2,135}{(1,76)^3} = 0,39 > 0 \rightarrow$ asimetría a la derecha
- Coeficiente de apuntamiento o curtosis: $g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3 = \frac{24,526}{(1,76)^4} - 3 = -0,44 < 0 \rightarrow$ Platicúrtica

## TRANSFORMACIONES LINEALES DE LAS VARIABLES

Sea X es una variable estadística con distribución de frecuencias $(x_i , n_i)$, se entiende que otra variable Y es una transformación lineal de X si su distribución de frecuencias es $(y_i , n_i)$ con $y_i = a + b \cdot x_i$ para algún par de números **a** (cambio de origen) y **b** (cambio de escala).

- Los promedios y medidas de posición son valores de la variable y, por tanto, una transformación lineal en la variable les afecta en la misma medida que a esta, ya que las frecuencias que corresponden a cada valor y a su transformado son las mismas.

| Variable | Media | Mediana | Moda | Cuantiles $(b > 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| X, $(x_i , n_i)$ | $\overline{x}$ | $M_{ex}$ | $M_{dx}$ | $D_{ix}$ , $Q_{ix}$ , $P_{ix}$ |
| Y, $(y_i , n_i)$<br>$y_i = a + b \cdot x_i$ | $\overline{y} = a + b \cdot \overline{x}$ | $M_{ey} = a + b \cdot M_{ex}$ | $M_{dy} = a + b \cdot M_{dx}$ | $D_{iy} = a + b \cdot D_{ix}$<br>$Q_{iy} = a + b \cdot Q_{ix}$<br>$P_{iy} = a + b \cdot P_{ix}$ |

- Varianza y desviación típica se encuentran afectadas por el cambio de escala (**b**) y no por un cambio de origen (**a**)

| Variable | Varianza | Desviación típica |
|---|---|---|
| X, $(x_i , n_i)$ | $s_x^2$ | $s_x$ |
| Y, $(y_i , n_i)$<br>$y_i = a + b \cdot x_i$ | $s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2$ | $s_y = b \cdot s_x$ |

- El coeficiente de variación de Pearson se encuentra afectado por un cambio de origen (**a**) pero no por un cambio de escala (**b)**.

| Variable | Varianza | Desviación típica | Coeficiente Variación Pearson |
|---|---|---|---|
| X, $(x_i , n_i)$ | $s_x^2$ | $s_x$ | $CV_x = \frac{s_x}{\overline{x}}$ |
| Y, $(y_i , n_i)$<br>$y_i = a + b \cdot x_i$ | $s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2$ | $s_y = b \cdot s_x$ | $CV_y = \frac{b \cdot s_x}{a + b \cdot \overline{x}}$ |
| Y, $(y_i , n_i)$<br>$y_i = b \cdot x_i$ | $s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2$ | $s_y = b \cdot s_x$ | $CV_y = \frac{b \cdot s_x}{b \cdot \overline{x}} = \frac{s_x}{\overline{x}} = CV_x$ |

- Los coeficientes de asimetría y de curtosis permanecen invariantes ante un cambio de origen (**a**) y de escala (**b**).

| Variable | Moda | Desviación típica | Asimetría Pearson | Asimetría Fisher | C. Curtosis |
|---|---|---|---|---|---|
| X, $(x_i , n_i)$ | $M_{dx}$ | $s_x$ | $A_{px}$ | $g_{1x}$ | $g_{2x}$ |
| Y, $(y_i , n_i)$<br>$y_i = a + b \cdot x_i$ | $M_{dy} = a + b \cdot M_{dx}$ | $s_y = b \cdot s_x$ | $A_{px}$ | $g_{1x}$ | $g_{2x}$ |

## MEDIA ARITMÉTICA Y VARIANZA DE k GRUPOS

Dados k Grupos, respectivamente, con $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ observaciones, medias aritméticas $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_k)$, y varianzas $(s_1^2, s_2^2, \cdots, s_k^2)$, con $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Se demuestra que:

- La media de los k Grupos: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{x}_i}{N}$

Cuando en un conjunto de valores se pueden obtener dos ó más subconjuntos disjuntos, la media aritmética del conjunto se relaciona con la media aritmética de cada uno de los subconjuntos disjuntos de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i n_i}{N}$$

Sea la distribución $\overbrace{x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}}^{1^o\,\text{Grupo}}, \overbrace{x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_2}}^{2^o\,\text{Grupo}}$, observando que habría dos subconjuntos de $n_1$ y $(n_2 - n_{i+1})$ elementos cada uno.

La distribución: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2} \overline{x}_i n_i}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i n_i + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j n_j}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i n_i}{N} + \dfrac{\sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j n_j}{N}$

Multiplicando el numerador y denominador del primer sumando se multiplica por $n_1$ y el segundo por $n_2$

$$\overline{x} = \frac{n_1 . \sum_{i=1}^{n_1} x_i n_i}{n_1 . N} + \frac{n_2 . \sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j n_j}{n_2 . N} = \frac{n_1 \left( \dfrac{\sum_{j=1}^{n_1} x_j n_j}{n_1} \right)}{N} + \frac{n_2 \left( \dfrac{\sum_{j=n_1+1}^{n_2} x_j n_j}{n_2} \right)}{N} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2}{N}$$

- La varianza total de los k Grupos es igual a la media ponderada de las varianzas parciales más la varianza ponderada de las medias parciales:

$$\overbrace{s_x^2}^{\text{varianza total}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2 n_i}{N}}^{\substack{\text{media ponderada de las varianzas parciales}}}}_{\text{intra-grupos}} + \underbrace{\overbrace{\frac{\sum_{i=1}^{k} (\overline{x}_i - \overline{x})^2 n_i}{N}}^{\substack{\text{varianza ponderada de las medias parciales}}}}_{\text{entre-grupos}}$$

Mediante $x_{ij}$ se denota en el grupo i-ésimo $(i = 1, 2, \cdots, k)$, la observación j-ésima $(j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[(x_{ij}-\overline{x}_i)+(\overline{x}_i-\overline{x})\right]^2 =$$

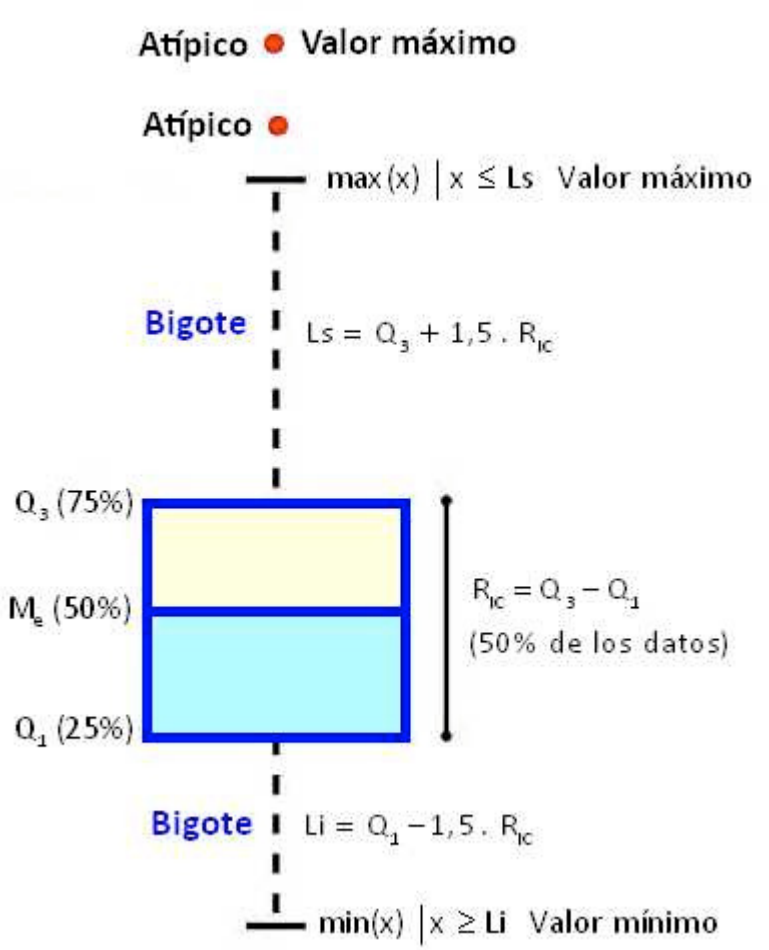
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i-\overline{x})\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)}_{=0} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i-\overline{x})\,n_i =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\, s_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i-\overline{x})\,n_i$$

Estas propiedades adquieren un sentido importante en la técnica de Análisis de la Varianza (ANOVA)

**DIAGRAMA DE CAJA Y BIGOTES**

Una gráfica de este tipo consiste en una **Caja** rectangular, donde los lados más largos muestran el **recorrido intercuartílico**. Este rectángulo está dividido por un segmento vertical que indica donde se posiciona la mediana y por lo tanto su relación con los cuartiles primero y tercero(recordemos que el segundo cuartil coincide con la mediana).
Esta caja se ubica a escala sobre un segmento que tiene como extremos los valores mínimo y máximo de la variable.
Las líneas que sobresalen de la caja se llaman **Bigotes**. Estos bigotes tienen tienen un límite de prolongación, de modo que cualquier dato o caso que no se encuentre dentro de este rango es marcado e identificado individualmente.



La Caja contiene el 50% de las observaciones centrales y su altura (base sí se coloca horizontalmente) es el recorrido intercuartílico.

El intervalo $[Li - Ls] \rightarrow \begin{matrix} Li = Q_1 - 1{,}5 \,.\, R_{IC} \\ Ls = Q_3 + 1{,}5 \,.\, R_{IC} \end{matrix}$ es el **intervalo de valores admisibles** y mide cuatro veces el recorrido intercuartílico. Los valores que quedan fuera del mismo son los que se consideran **atípicos**.

Para analizar la simetría o asimetría de un conjunto de datos a partir de este gráfico se utilizan los siguientes criterios:

- Si la línea de la Mediana está en el centro de la caja o cerca del mismo, constituye un indicio de simetría.
- Si la línea que parte de $Q_3$ es, aproximadamente de la misma altura que la que parte de $Q_1$, también es un indicio de simetría.
- Si la línea de la Mediana se encuentra más cerca de $Q_1$ que del centro de la caja, es indicio de que los datos son asimétricos a la derecha.
- Si la línea que parte de $Q_3$ es considerablemente más larga que la que parte de $Q_1$, es un indicio de simetría a la derecha o positiva.
- Son indicios de asimetría negativa que la línea de la Mediana esté más cerca de la línea de $Q_3$ que del centro de la caja y que la línea que parte de $Q_3$ sea considerablemente más corta que la que lo hace de $Q_1$

Sea la distribución X:

36 25 37 24 39 20 36 45 31 31 39 24 29 23 41 40 33 24 34 40

Para calcular los parámetros estadísticos, lo primero es ordenar la distribución:

| $x_i$ | 20 | 23 | 24 | 25 | 29 | 31 | 33 | 34 | 36 | 37 | 39 | 40 | 41 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $N_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 18 | 19 | 20 |
| | | | **5** | | | | **10** | | | | **15** | | | |

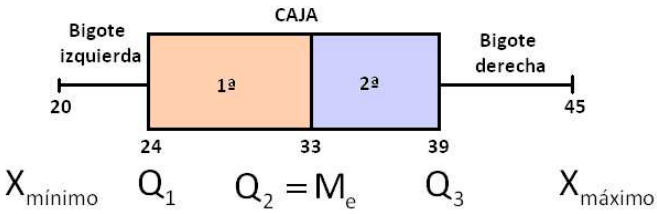
$Q_1 = 24$ $Q_2 = M_e = 33$ $Q_3 = 39$

Como N = 20 resulta que 20/4 = 5 $\rightarrow$ $Q_1 = 24$

20/2 =10 $\rightarrow$ $Q_2 = M_e = 33$

3.20 / 4 = 15 $\rightarrow$ $Q_3 = 39$

DIAGRAMA DE CAJA Y BIGOTES:




La mayor utilidad de los diagramas *Caja-Bigotes* es para comparar dos o más distribuciones.

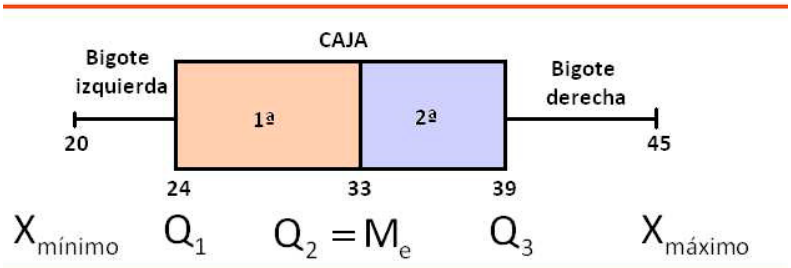
Sea la distribución Y:

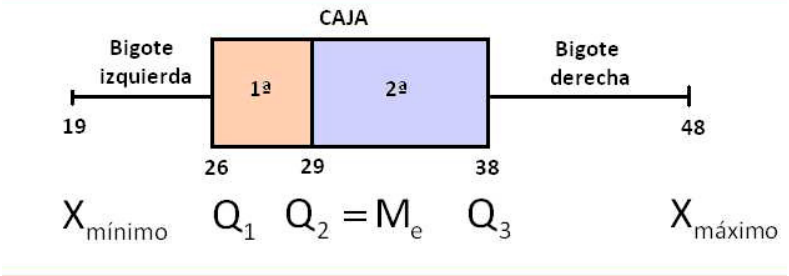
35 38 32 28 30 29 27 19 48 40 39 24 24 34 26 41 29 48 28 22

Ordenando los datos de menor a mayor:

| $y_j$ | 19 | 22 | 24 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 | 34 | 35 | 38 | 39 | 40 | 41 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $N_j$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 |
| | | | | **5** | | | **10** | | | | | **15** | | | | |

$Q_1 = 26$ $Q_2 = M_e = 29$ $Q_3 = 38$




A partir de dicha comparación puede obtenerse bastante información de ambas distribuciones.

## DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA

El diagrama "tallo y hojas" (**Stem-and-Leaf Diagram**) permite obtener simultáneamente una distribución de frecuencias de la variable y su representación gráfica.

Para construirlo basta separar en cada dato el último dígito de la derecha (que constituye la **Hoja**) del bloque de cifras restantes (que formará el **Tallo**).

Esta representación de los datos es semejante a la de un histograma pero además de ser fáciles de elaborar, presentan más información que estos.

**Ejemplo.-** Horario de trenes confeccionado a partir de un díptico de la línea Castelldefels-Barcelona/Sants recogido en la estación de Renfe. Originalmente el horario ocupa una tabla de 10 filas y 9 columnas más una columna "viuda" con el tren de las 22:38. Los datos vienen dados en formato horas.minutos

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.03 | 7.32 | 9.02 | 11.07 | 13.32 | 15.07 | 16.50 | 18.32 | 20.07 | 22.38 |
| 6.02 | 7.37 | 9.07 | 11.32 | 13.37 | 15.20 | 17.02 | 18.37 | 20.20 | |
| 6.18 | 7.50 | 9.24 | 11.37 | 13.50 | 15.32 | 17.07 | 18.50 | 20.32 | |
| 6.37 | 8.02 | 9.32 | 12.02 | 14.02 | 15.37 | 17.20 | 19.02 | 20.37 | |
| 6.48 | 8.05 | 9.37 | 12.07 | 14.07 | 15.50 | 17.32 | 19.07 | 20.50 | |
| 6.55 | 8.20 | 10.02 | 12.32 | 14.20 | 16.02 | 17.37 | 19.20 | 21.02 | |
| 7.02 | 8.24 | 10.07 | 12.37 | 14.32 | 16.07 | 17.50 | 19.32 | 21.07 | |
| 7.07 | 8.32 | 10.32 | 13.02 | 14.37 | 16.20 | 18.02 | 19.37 | 21.20 | |
| 7.20 | 8.37 | 10.37 | 13.07 | 14.50 | 16.32 | 18.07 | 19.50 | 21.32 | |
| 7.25 | 8.51 | 11.02 | 13.20 | 15.02 | 16.37 | 18.20 | 20.02 | 21.37 | |

En el diagrama *Stem & Leaf* se representa la hora a la izquierda de la barra de separación | y los minutos de la salida de cada tren a la derecha.

La frecuencia de los trenes se deduce fácilmente de la longitud de las filas y es, además, muy fácil ver en que minutos de cada hora pasan típicamente los mismos.

05 | 03
06 | 02 18 37 48 55
07 | 02 07 20 25 32 37 50
08 | 02 05 20 24 32 37 51
09 | 02 07 24 32 37
10 | 02 07 32 37
11 | 02 07 32 37
12 | 02 07 32 37
13 | 02 07 20 32 37 50
14 | 02 07 20 32 37 50
15 | 02 07 20 32 37 50
16 | 02 07 20 32 37 50
17 | 02 07 20 32 37 50
18 | 02 07 20 32 37 50
19 | 02 07 20 32 37 50
20 | 02 07 20 32 37 50
21 | 02 07 20 32 37
22 | 38

Por otra parte, dado que a algunas horas se repite exactamente el horario de los trenes se puede reducir aún más el tamaño del gráfico, sin perder información y ganando en claridad.

Diagrama *Stem & Leaf* reducido:

```
                                  05 | 03
                                  06 | 02  18  37  48  55
                                  07 | 02  07  20  25  32  37  50
                                  08 | 02  05  20  24  32  37  51
                                  09 | 02  07  24  32  37
                          10  11  12 | 02  07  32  37
13  14  15  16  17  18  19  20 | 02  07  20  32  37  50
                                  21 | 02  07  20  32  37
                                  22 | 38
```

Originalmente el horario ocupa una tabla de 10 filas y 9 columnas más una columna "viuda" con el tren de las 22:38. Un total de 91 campos con formato hh.mm cada uno, 455 **c**aracteres. Al final tenemos 59 campos de 2 dígitos, 118 caracteres más los separadores, es decir 4 veces menos dígitos que con el horario original, menos espacio y más claridad.

Esto da idea de que una disposición apropiada de los datos puede ser doblemente informativa y que la representación gráfica puede contribuir enormemente a la percepción de patrones y a la comprensión de la naturaleza de los fenómenos.

**Ejemplo.-** Sea la distribución de frecuencias:

36 25 37 24 39 20 36 45 31 31 39 24 29 23 41 40 33 24 34 40

Ordenando los datos de menor a mayor:

20 23 24 24 24 25 29 31 31 33 34 36 36 37 39 39 40 40 41 45

- Se comienza seleccionando el **tallo**: cifras de decenas (3, 2, 4), que reordenadas son 2, 3 y 4.
- Se «añade» cada **Hoja** a su **Tallo** (unidades)

20| 23| 24| 24| 24| 25| 29| 31 31 33 34 36 36 37 39 39 40 40 41 45

| **Tallo** decenas | **Hoja** unidades |
|---|---|
| 2 | 0 3 4 4 4 5 9 |
| 3 | 1 1 3 4 6 6 7 9 9 |
| 4 | 0 0 1 5 |

📖 Para comparar dos distribuciones, sea otra distribución de datos:

35 38 32 28 30 29 27 19 48 40 39 24 24 34 26 41 29 48 28 22

Ordenando los datos de menor a mayor:

19 22 24 24 26 27 28 28 29 29 30 32 34 35 38 39 40 41 48 48

| Hoja (N=20) unidades | Tallo decenas | Hoja (N=20) unidades |
|---|---|---|
| 9 | 1 | |
| 9 9 8 8 7 6 4 4 2 | 2 | 0 3 4 4 4 5 9 |
| 9 8 5 4 2 0 | 3 | 1 1 3 4 6 6 7 9 9 |
| 8 8 1 0 | 4 | 0 0 1 5 |

**Ejemplo.-** El tratamiento de los niños con desórdenes de la conducta puede ser complejo. Además del reto que ofrece el tratamiento, se encuentra la falta de cooperación del niño/niña y el miedo y la falta de confianza de los adultos. Para diseñar el tratamiento un psiquiatra considero una muestra aleatoria de 20 niños, anotando el tiempo necesario que requiere en cada niño para lograr un plan integral, los resultados obtenidos en horas son:

6 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 11

CONSTRUCCIÓN DIAGRAMA DE CAJA:

| $x_i$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 7 | 5 | 1 |
| $N_i$ | 1 | 3 | 7 | 14 | 19 | 20 |
| | | | **5** | **10** | **15** | |

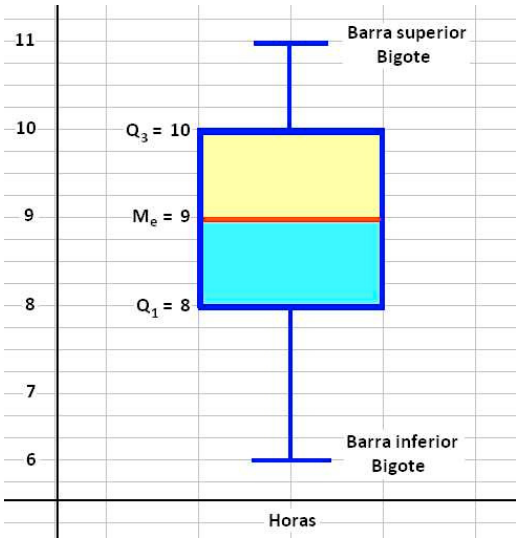
$20/4 = 5 \rightarrow Q_1 = 8$ $\quad 20/2 = 10 \rightarrow Q_2 = M_e = 9$ $\quad 3.20/4 = 15 \rightarrow Q_3 = 10$

$\text{Rango} = 11 - 6 = 5$ horas $\quad R_{IC} = Q_3 - Q_1 = 10 - 8 = 2$ horas

Intervalo de valores admisibles: $[Li - Ls] \rightarrow \begin{cases} Li = Q_1 - 1{,}5 \,.\, R_{IC} \rightarrow Li = 8 - 1{,}5 \,.\, 2 = 5 \\ Ls = Q_3 + 1{,}5 \,.\, R_{IC} \rightarrow Ls = 10 + 1{,}5 \,.\, 2 = 13 \end{cases}$

Valores extremos $\begin{cases} \exists\, x_i \;/\; x_i < 5 = Li \rightarrow 6 > 5 \text{ Por tanto 6 no es valor extremo inferior} \\ \exists\, x_i \;/\; x_i > 13 = Ls \rightarrow 11 < 13 \text{ Por tanto 11 no es valor extremo superior} \end{cases}$

La caja muestra cierta simetría, aunque los bigotes dicen lo contrario, mostrando un sesgo a la izquierda.



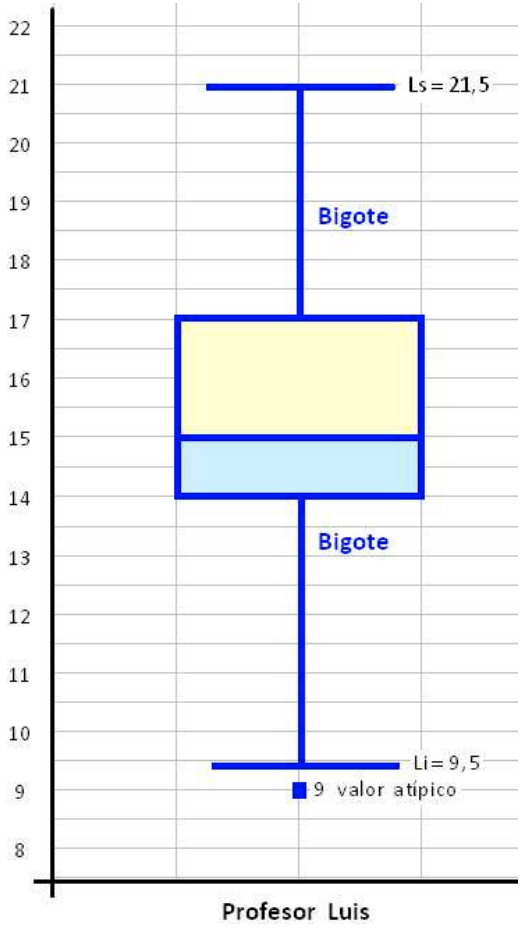
CONSTRUCCIÓN DIAGRAMA TALLO Y HOJA (Stem & Leaf):

6 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 11

| **Tallo** Stem | **Hoja** Leaf |
|---|---|
| 6 | 0 |
| 7 | 0 0 |
| 8 | 0 0 0 0 |
| 9 | 0 0 0 0 0 0 0 |
| 10 | 0 0 0 0 0 |
| 11 | 0 |

La distribución no es simétrica con un leve sesgo a la izquierda.

**Ejemplo.-** Dos profesores (Luis y Miguel) están interesados en estudiar los hábitos de sueño de los estudiantes. Para ello, registran el tiempo (en minutos) que demoran en quedarse dormidos sus alumnos desde que comienza la clase. El gráfico muestra los tiempos que tardan en quedarse dormidos los alumnos del profesor Luis.




$\text{Rango} = 21 - 9 = 12$ minutos

$Q_1 = 14 \qquad M_e = 15 \qquad Q_3 = 17$

$R_{IC} = Q_3 - Q_1 = 17 - 14 = 3$ minutos

$$[Li - Ls] \rightarrow \begin{matrix} Li = Q_1 - 1{,}5 \,.\, R_{IC} \rightarrow Li = 14 - 1{,}5 \,.\, 3 = 9{,}5 \\ Ls = Q_3 + 1{,}5 \,.\, R_{IC} \rightarrow Ls = 17 + 1{,}5 \,.\, 3 = 21{,}5 \end{matrix}$$

Intervalo de valores admisibles: $[9{,}5 - 21{,}5]$

Los bigotes son los segmentos verticales que parten de la caja y llegan hasta el menor y mayor valor observado que sea admisible.

Por debajo de la caja, se encuentra el valor atípico 9 (fuera del menor valor admisible).

La caja presenta una asimetría a la derecha.

Los datos del profesor Miguel son los siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,5 | 11,3 | 11,9 | 12 | 12,3 | 12,3 | 12,5 | 12,7 | 13,4 | 13,7 |
| 13,8 | 14,2 | 14,8 | 15,1 | 15,3 | 16,7 | 16,8 | 18,8 | 20,8 | |

Para construir un diagrama de caja:

Posición de la Mediana: $\frac{N+1}{2}=\frac{20}{2}=10 \rightarrow M_e=13,7$

Posición $Q_1$: $\frac{N+1}{4}=\frac{20}{4}=5 \rightarrow Q_1=12,3$ Posición $Q_3$: $\frac{3N+1}{4}=\frac{58}{4}=14,5 \rightarrow Q_3=15,3$

$R_{IC}=Q_3-Q_1=15,3-12,3=3$ minutos

Intervalo de valores admisibles: $[Li - Ls] \rightarrow \begin{matrix} Li=Q_1-1,5\,.\,R_{IC} \rightarrow Li=12,3-1,5\,.\,3=7,8 \\ Ls=Q_3+1,5\,.\,R_{IC} \rightarrow Ls=15,3+1,5\,.\,3=19.8 \end{matrix}$

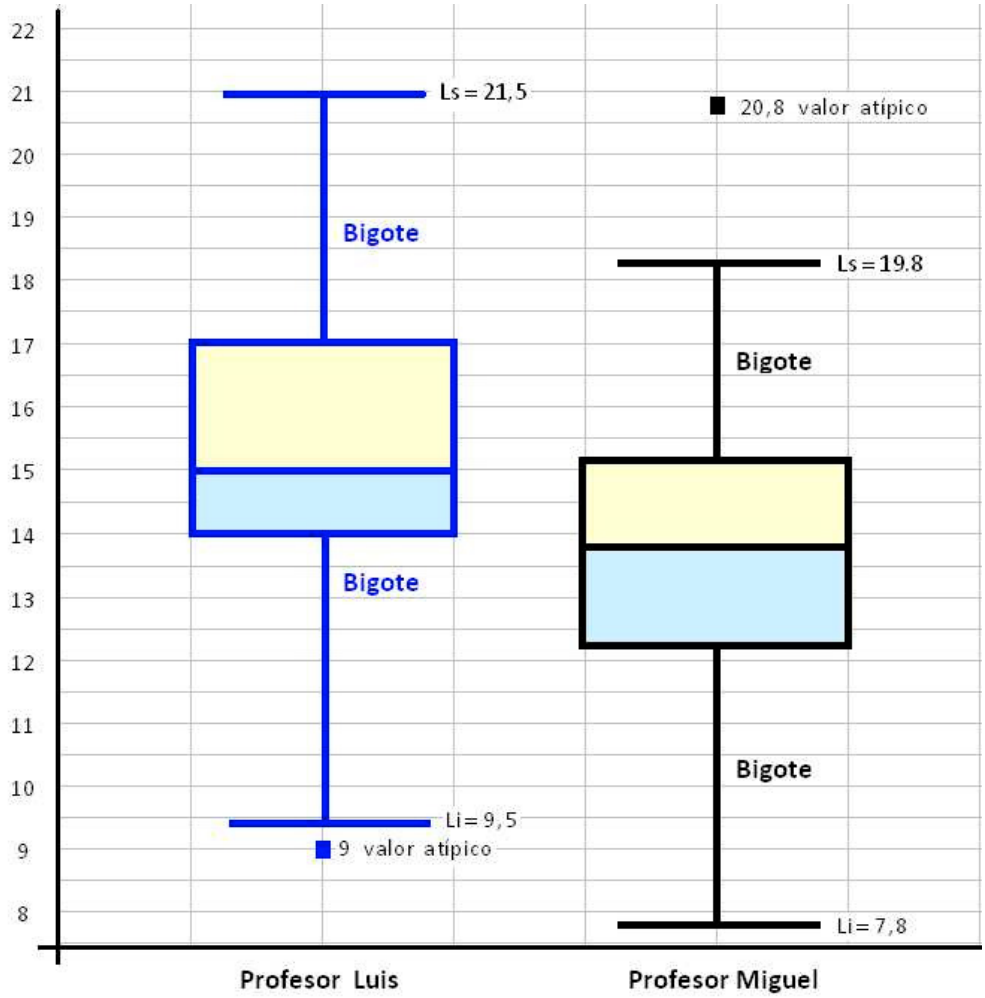
Cálculo de valores extremos:

- $\exists x_i \ / \ x_i < 7,8=Li \rightarrow 10,5 > 7,8 \Rightarrow$ 10,5 no es valor extremo inferior
- $\exists x_i \ / \ x_i > 19,8=Ls \rightarrow 20,8 > 19,8 \Rightarrow$ 20,8 es valor extremo superior

  Verificando si el número anterior es valor extremo superior:

  $\exists x_i \ / \ x_i > 19,8=Ls \rightarrow 18,8 < 19,8 \Rightarrow$ 18,8 no es valor extremo superior

  $\exists x_i \ / \ x_i > 19,8=Ls \rightarrow 20,8 > 19,8 \Rightarrow$ 20,8 es valor extremo superior



## MEDIDAS DE CONCENTRACIÓN: ÍNDICE DE GINI Y CURVA DE LORENZ

Cuando se realizaba un estudio descriptivo de los valores observados en una variable, la palabra concentración era la opuesta a dispersión.

A partir de ahora el objeto del estudio será el total de los recursos repartidos entre todos los individuos que intervienen en la distribución.

Si a cada individuo $n_i$ se le atribuye una cantidad $x_i$ de recursos (euros sí se analizan los salarios; toneladas de carbón si se estudia la producción de carbón de una zona...), el total de recursos que se reparten N individuos o entes que forman la distribución será: $\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i = N.\overline{x}$

La cantidad total de recursos no suele siempre repartirse de forma equitativa, sino que al haber distintos valores posibles de la variable $x_i$ habrá individuos que se repartan una mayor cantidad de recursos que otros. Es este aspecto el que se desea estudiar con las medidas de concentración.

En esta línea, se dice que una distribución está muy concentrada si la suma total de sus valores se encuentra muy concentrada en pocos individuos, mientras que se dice que está poco concentrada si sus recursos se encuentran repartidos entre sus individuos. Cuando los recursos están perfectamente distribuidos se dice que la variable está equilibrada.

Para analizar la concentración de la distribución se realiza el seguimiento de los recursos repartidos en la distribución a medida que se van asignando a los individuos. Para ello, se ordena a los individuos en orden creciente, observando como al avanzar los valores ocurridos de la variable van evolucionando el número de individuos que tienen asignada una cantidad de recursos (por un lado) y el total de recursos que esos individuos se han repartido (por otra parte).

Las mediciones se realizan asociando a cada posible valor observado de la variable $x_i$ dos valores:

- La frecuencia relativa acumulada que le corresponde, $p_i = \frac{N_i}{N}$, es decir, el número de individuos que perciben recursos inferiores o iguales a esa cantidad.
- La proporción de recursos que llevan repartida entre ellos $q_i = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i . n_i}^{u_i}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}_{u_k}} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i . n_i}^{u_i}}{N.\overline{x}} = \frac{u_i}{u_k}$

Al ir aumentando el valor de la variable sobre la distribución, si la proporción de recursos que se van repartiendo es aproximadamente igual a la proporción de individuos que se lo van repartiendo, la variable estará bien repartida y, en consecuencia, la distribución estará poco concentrada.

Si por el contrario, los individuos que menos perciben se reparten una proporción de recursos muy inferiores a la que representan ellos con respecto al total de los individuos, la distribución será muy concentrada y los recursos mal repartidos.

El análisis descrito se visualiza de forma sencilla sobre un cuadrado de lado unidad (100%) y recibe el nombre de curva de concentración de Lorenz.

Para el desarrollo del estudio se parte de una tabla como la que se describe:

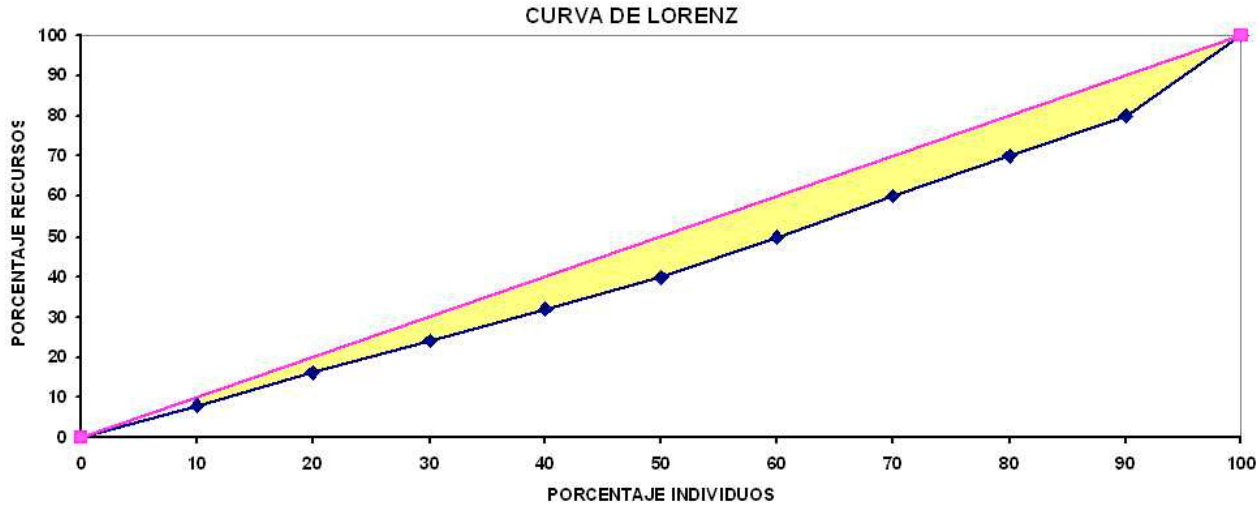
| $x_i$ | $n_i$ | $x_i.n_i$ | $N_i$ | $u_i = x_i.n_i$ acumulada | $\%\, p_i = \frac{N_i}{N}.100$ | $\%\, q_i = \frac{u_i}{u_k}.100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ | $x_1.n_1$ | $N_1$ | $u_1 = x_1.n_1$ | $p_1$ | $q_1$ |
| $x_2$ | $n_2$ | $x_2.n_2$ | $N_2$ | $u_2 = x_1.n_1 + x_2.n_2$ | $p_2$ | $q_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $x_i$ | $n_i$ | $x_i.n_i$ | $N_i$ | $u_i = \sum_{i=1}^{i} x_i.n_i$ | $p_i$ | $q_i$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $x_k$ | $n_k$ | $x_k.n_k$ | $N_k$ | $u_k = \sum_{i=1}^{k} x_i.n_i$ | $p_k$ | $q_k$ |
| | $N$ | $\sum_{i=1}^{k} x_i.n_i$ | | | | |

En la columna $u_i = x_i.n_i$ acumulada se expresan las sumas acumuladas parciales del recurso hasta el lugar correspondiente, y donde $p_i$ y $q_i$ son las proporciones de individuos y recursos acumulados, respectivamente, que se pueden calcular:

$$p_i = \frac{N_i}{N} \qquad q_i = \frac{u_i}{u_k} \qquad (.100 \text{ expresados en porcentajes})$$

Al estar ordenados los $x_i$ en orden creciente, al principio aparecen los que menos perciben y, por tanto, la proporción de individuos siempre tiene que avanzar más rápidamente que la proporción de recursos repartidos. Así, pues, siempre $p_i \geq q_i$

Para la curva de Lorenz construimos un cuadrado de lado unidad (100%), representando en los ejes los valores $p_i$ (individuos) y $q_i$ (recursos). Si sobre el eje de abscisas se representan los valores $p_i$ (individuos) y sobe el eje de ordenadas los valores $q_i$ (recursos), la curva formada siempre estará por debajo de la diagonal principal del cuadrado.




Es evidente que si $p_i = q_i$ la curva coincidiría con la diagonal, la proporción de individuos y de recursos irían evolucionando conjuntamente, y sería un caso de variable equidistribuida.

Si por el contrario, la curva se va alejando hacia los lados del cuadrado, dejando entre ella y la diagonal un área considerable, cuanto mayor sea esta separación, mayor será la concentración y peor el reparto de recursos.

El caso de máxima concentración se alcanzaría cuando la curva de Lorenz coincidiese con los lados del cuadrado, dejando un área entre ella y la diagonal de 0,5 (mitad del área del cuadrado de lado unidad).

La idea de medir el área entre la diagonal y la curva de Lorenz da como resultado el llamado Índice de Concentración de Gini, que viene expresado:

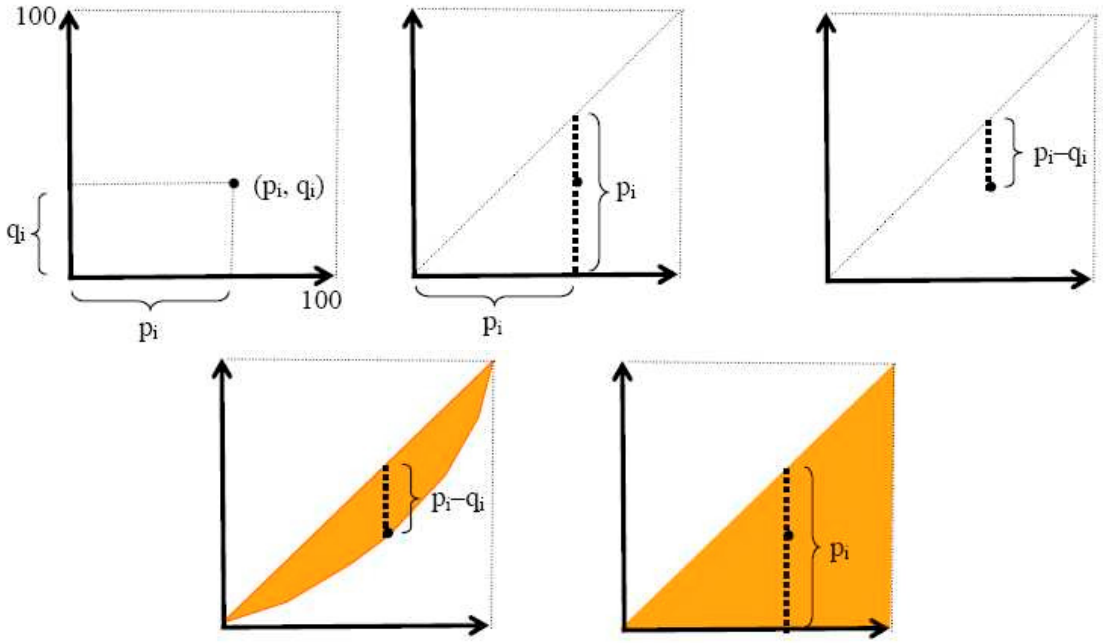
$$I_G = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} q_i}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i} \qquad 0 \le I_G \le 1$$

$$\begin{cases} I_G = 0 \longrightarrow \text{equidistribución} \\ I_G \xrightarrow{+\text{ próximo}} 0 \text{ (mejor reparto equitativo)} \\ I_G \xrightarrow{+\text{ próximo}} 1 \text{ (peor reparto} \equiv \text{mayor concentración)} \\ I_G = 1 \longrightarrow \text{un individuo se lleva el total de recursos} \end{cases}$$

Adviértase que: $\frac{\sum(p_i - q_i)}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i - \sum q_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i}{\sum p_i} - \frac{\sum q_i}{\sum p_i} = 1 - \frac{\sum q_i}{\sum p_i}$ (propiedad sumatorio)

RELACIÓN ENTRE ÍNDICE CONCENTRACIÓN DE GINI Y CURVA DE LORENZ

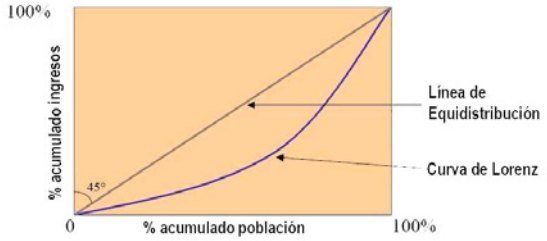
Dado un punto cualquiera ($p_i$, $q_i$) de la curva de Lorenz




- $p_i = q_i \ \forall i \xrightarrow{\text{curva de Lorenz sobre la diagonal}} I_G = 0 \ \mapsto$ Equidistribución
- $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_{k-1} = 0 \xrightarrow{\text{curva de Lorenz sobre lados del cuadrado}} I_G = 1 \ \mapsto$ Máxima Concentración

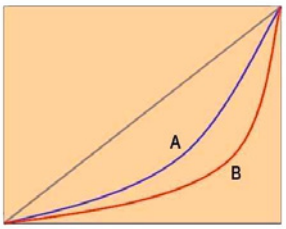
## Curva de Lorenz

Muestra el porcentaje acumulativo de ingreso que poseen los individuos u hogares, ordenados en forma ascendente de acuerdo con su nivel de ingreso.

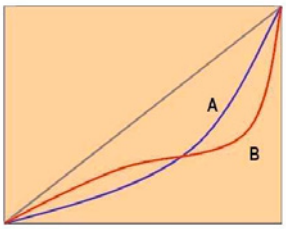



## Curva de Lorenz

Para determinar el grado de desigualdad, se compara las Curvas de Lorenz.



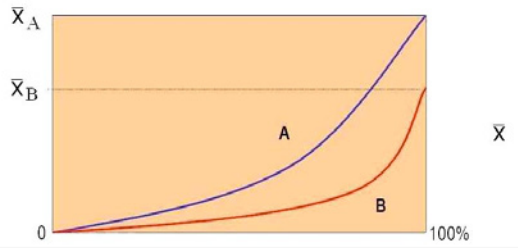

A "domina" a B ⇒
⇒ Desigualdad es menor en A




A y B se cruzan ⇒
⇒ No es posible establecer comparaciones

## Curva de Lorenz Generalizada

En caso de que las Curvas de Lorenz se crucen, es posible utilizar la CL Generalizada, multiplicando los valores por la media de cada distribución ($\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$).




El coeficiente de Corrado Gini (1884-1965) satisface **cuatro principios para medir la desigualdad**:

- **Principio de anonimato.-** Si se produce una modificación en una distribución de renta consistente en que dos individuos intercambien sus rentas, el valor del índice no debe variar.
- **Principio de la población.-** Si se multiplica por un mismo escalar el tamaño de todos los conjuntos de individuos con la misma renta, el valor del índice no debe variar. Es decir, el tamaño de la población no importa, lo que interesa son las proporciones de individuos de la población que perciben diferentes niveles de renta.
- **Principio de la renta relativa.-** El índice debe mantenerse invariante frente a las variaciones proporcionales en todas las rentas.
- **Principio de Dalton.-** Toda transferencia de renta de un individuo a otro más rico ha de *aumentar* el valor de la desigualdad, y recíprocamente toda transferencia de renta de un individuo a otro más pobre ha de *reducir* el índice, siempre que la ordenación relativa de los individuos se mantenga.

## MEDIDAS DE CONCENTRACIÓN INDUSTRIAL

### ÍNDICE DE HERFINDAHL

Sea un conjunto de k empresas con una cifra de ventas $x_i$, se denomina Cuota de Mercado a la cantidad: $s_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{k} x_i}$

El Índice de Concentración de Herfindahl es la cantidad: $H = \sum_{i=1}^{k} s_i^2$

PROPIEDADES DEL ÍNDICE DE HERFINDAHL:

- Es un índice acotado: $\frac{1}{k} \le H \le 1$
- En un mercado de competencia perfecta: $H = \frac{1}{k}$ , puesto que $H = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{k}\right]^2 = \frac{1}{k}$
- En un mercado monopolístico: $H = 1$

**Ejemplo:** Importaciones de vino (millones de litros) según el Banco Mundial en 2004:

| Francia | Italia | Australia | España | Chile | Alemania | Portugal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1049 | 952 | 731 | 183 | 152 | 80,6 | 53 |

Cuota de mercado e Índice de Herfindahl:

| | Francia | Italia | Australia | España | Chile | Alemania | Portugal | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1049 | 952 | 731 | 183 | 152 | 80,6 | 53 | 3204,6 |
| $s_i$ | 0,3273 | 0,2971 | 0,2281 | 0,0571 | 0,0474 | 0,0252 | 0,0178 | 1 |
| $s_i^2$ | 0,1072 | 0,0883 | 0,0520 | 0,0033 | 0,0022 | 0,0006 | 0,0003 | 0,2539 |

La cuota de mercado de cada país se calcula mediante la fórmula: $s_i = x_i / \sum_{i=1}^{7} x_i$ .

En el caso de competencia perfecta la cuota de mercado sería $s_i = 1/7 = 0{,}1428$ , por lo que se puede afirmar que en este mercado no existe competencia perfecta.

El índice de concentración de Herfindahl: $H = \sum_{i=1}^{7} s_i^2 = 0{,}2539$

## Índice de Theil

Indicador de desigualdad en el reparto de una magnitud entre distintas unidades preceptoras o de asignación (el reparto puede tener lugar entre personas (rentas), empresas (cuotas de mercado), unidades espaciales (provincias o regiones), etc., fue introducido inicialmente como una medida de entropía dentro del contexto de la teoría de la información.
La entropía sirve para medir el grado de desorden en un sistema (un sistema desordenado sería equivalente a otro en el que cada uno de los componentes del mismo no están 'equilibrados') y también para comparar situaciones distintas.

El índice de Theil se define, inicialmente, en términos de las probabilidades de los distintos valores de una distribución. Sin embargo, esas probabilidades pueden aproximarse por las frecuencias relativas observadas para esos valores o simplemente por un conjunto de proporciones, con las únicas condiciones de que sean no negativas y que su suma sea igual a la unidad.

En el marco de este contexto, sean N individuos con rentas $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, la proporción de la masa total de las rentas que corresponde al individuo i-ésimo será: $p_i = \dfrac{x_i}{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}$

El índice de Theil, se define: $T = \ln N - H_N(p_i)$

se basa en la entropía o medida del desorden: $H_N(p_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i . n_i . Ln\left[\dfrac{1}{p_i}\right] = -\sum_{i=1}^{k} p_i . n_i . Ln(p_i)$

con lo que, $T = \ln N + \sum_{i=1}^{k} p_i . n_i . Ln(p_i)$.

El índice de Theil relativo: $\overline{T} = \dfrac{T}{Ln\, N} \qquad 0 \le \overline{T} \le 1$

El índice de Theil presenta el inconveniente de que depende del número máximo de observaciones. Los valores extremos del índice de Theil son $[0, Ln\, N]$

- $T = 0$ cuando $[p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-1} = 0]$ (toda la cuota de mercado de todas las empresas $p_i$ vale cero, salvo la de una que es la unidad. Situación de monopolio). La concentración es máxima.
- $T = Ln\, N$ cuando $[p_1 = p_2 = \cdots = p_k]$ (la cuota de mercado de todas las empresas $p_i$ son iguales. Situación de reparto igualitario). La concentración es mínima.
- $\begin{cases} T \longrightarrow Ln\, N \mapsto \text{Mayor equidad (mínima concentración)} \\ T \longrightarrow 0 \mapsto \text{Menor equidad (máxima concentración)} \end{cases}$
- El índice de Theil no requiere la ordenación de los valores
- Si algún $p_i = 0 \mapsto p_i . n_i . Ln(p_i) = 0$
- El índice de Theil permite descomponer la desigualdad en subgrupos, en este sentido se puede estudiar la desigualdad debida a cada uno de los subgrupos.

  Sea X la variable observada, suponiendo que X se agrupa en k grupos $(G_1, G_2, \cdots, G_k)$, respectivamente, de tamaños $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$.

  donde, $p_g = \dfrac{\overbrace{x_i}^{i \in G}}{\sum_{i=1}^{7} x_i . n_i} \qquad g = 1, \cdots, k$

  En cada uno de los grupos: $T_g = Ln\, N_g + \sum_{i=1}^{N_g} p_i . Ln\left[\dfrac{1}{p_i}\right]$

Entonces, $T = \overbrace{\text{Ln}\,N + \sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, \text{Ln}\left[\frac{p_g}{N_g}\right]}^{\text{Desigualdad entre Grupos INTERGRUPOS}} + \overbrace{\sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, T_g}^{\text{Desigualdad dentro grupos INTRAGRUPOS}}$

- **DESIGUALDAD INTERGRUPOS:** $\text{Ln}\,N + \sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, \text{Ln}\left[\frac{p_g}{N_g}\right]$, mide la disparidad entre grupos teniendo en cuenta el tamaño de cada grupo $N_g$ en relación al peso del grupo $p_g$ en la variable económica observada.

- **DESIGUALDAD INTRAGRUPOS:** $\sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, T_g$ mide la disparidad dentro de los grupos, es la media de los coeficientes de Theil de cada grupo ponderados por los pesos de cada grupo.

**Ejemplo 1:** Dada la distribución de salarios semanales (euros), determinar el coeficiente de Theil

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i \,.\, n_i$ | $p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{k} x_i \,.\, n_i}$ | $\text{Ln}\,p_i$ | $p_i \,.\, n_i \,.\, \text{Ln}\,p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 10 | 800 | 0,01 | -4,605 | -0,461 |
| 150 | 20 | 3000 | 0,01875 | -3,977 | -1,491 |
| 200 | 15 | 3000 | 0,025 | -3,689 | -1,383 |
| 240 | 5 | 1200 | 0,03 | -3,507 | -0,526 |
| | 50 | 8000 | | | -3,861 |

$H_{50}(p_i) = -\sum_{i=1}^{4} p_i \,.\, n_i \,.\, \text{Ln}\,(p_i) = 3{,}861 \qquad \text{Ln}\,(50) = 3{,}912$

Índice de Theil : $T = \ln 50 - H_{50}(p_i) = 3{,}912 - 3{,}861 = 0{,}051$

Índice de Theil relativo: $\overline{T} = \frac{T}{\text{Ln}\,50} = \frac{0{,}051}{3{,}912} = 0{,}013$

**Ejemplo 2:** La tabla adjunta recoge datos sobre el valor añadido bruto (VAB) en u.m. de siete regiones vinícolas españolas.

| Regiones vinícolas | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | R7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VAB ($x_i$) | 2460,5 | 619 | 613,2 | 1150 | 1865 | 437,1 | 661,9 |

a) Hallar el coeficiente de Theil
b) Analizar el coeficiente de Theil mediante un análisis desagregado dividiendo las regiones vinícolas en dos grupos (R1-R4-R5 y R2-R3-R6-R7)

**Solución:**

a)

| **Regiones vinícolas** | **VAB** $(x_i)$ | $p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{k} x_i . n_i}$ | $\text{Ln}\, p_i$ | $p_i . n_i . \text{Ln}\, p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| R1 | 2460,5 | 0,315 | -1,155 | -0,364 |
| R2 | 619 | 0,079 | -2,535 | -0,201 |
| R3 | 613,2 | 0,079 | -2,544 | -0,200 |
| R4 | 1150 | 0,147 | -1,915 | -0,282 |
| R5 | 1865 | 0,239 | -1,432 | -0,342 |
| R6 | 437,1 | 0,056 | -2,883 | -0,161 |
| R7 | 661,9 | 0,085 | -2,468 | -0,209 |
| | 7806,7 | 1 | | -1,759 |

$$H_7(p_i) = -\sum_{i=1}^{7} p_i . n_i . \text{Ln}(p_i) = 1{,}759 \qquad \text{Ln}(7) = 1{,}946$$

Índice de Theil : $T = \text{Ln}\, 7 - H_7(p_i) = 1{,}946 - 1{,}759 = 0{,}187$

b) Dividiendo las regiones vinícolas en los grupos indicados:

| **Regiones vinícolas** | **VAB** $(x_i)$ | $p_g = \frac{\overbrace{x_i}^{i \in G}}{\sum_{i=1}^{7} x_i . n_i}$ | $p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i . n_i}$ | $\text{Ln}\, p_i$ | $p_i . n_i . \text{Ln}\, p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| R2 | 619 | 0,079 | 0,266 | -1,326 | -0,352 |
| R3 | 613,2 | 0,079 | 0,263 | -1,335 | -0,351 |
| R6 | 437,1 | 0,056 | 0,188 | -1,674 | -0,314 |
| R7 | 661,9 | 0,085 | 0,284 | -1,259 | -0,357 |
| | 2331,2 | 0,299 | 1 | | -1,375 |

$$T_g = \text{Ln}\, N_g + \sum_{i=1}^{N_g} p_i . \text{Ln}\left[\frac{1}{p_i}\right] \xrightarrow{g=1 \quad N_1=4} T_1 = \text{Ln}\, N_1 + \sum_{i=1}^{4} p_i . \text{Ln}\, p_i = \text{Ln}4 - 1{,}357 = 0{,}0113$$

| **Regiones vinícolas** | **VAB** $(x_i)$ | $p_g = \frac{\overbrace{x_i}^{i \in G}}{\sum_{i=1}^{7} x_i . n_i}$ | $p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{3} x_i . n_i}$ | $\text{Ln}\, p_i$ | $p_i . n_i . \text{Ln}\, p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| R1 | 2460,5 | 0,315 | 0,449 | -0,800 | -0,359 |
| R4 | 1150 | 0,147 | 0,210 | -1,561 | -0,328 |
| R5 | 1865 | 0,239 | 0,341 | -1,077 | -0,367 |
| | 5475,5 | 0,701 | 1 | -3,437 | -1,054 |

$$T_g = \text{Ln}\, N_g + \sum_{i=1}^{N_g} p_i . \text{Ln}\left[\frac{1}{p_i}\right] \xrightarrow{g=2 \quad N_2=3} T_2 = \text{Ln}\, N_2 + \sum_{i=1}^{3} p_i . \text{Ln}\, p_i = \text{Ln}3 - 1{,}054 = 0{,}0446$$

- Desigualdad **INTERGRUPOS** (entre grupos):

$$\text{Ln}\,N + \sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, \text{Ln}\left[\frac{p_g}{N_g}\right] \equiv \text{Ln}\,N + \sum_{g=1}^{2} p_g \,.\, \text{Ln}\left[\frac{p_g}{N_g}\right] = \text{Ln}\,7 + (0{,}299).\,\text{Ln}\left[\frac{0{,}299}{4}\right] + (0{,}701).\,\text{Ln}\left[\frac{0{,}701}{3}\right] =$$

$$= 1{,}9459 - 0{,}7755 - 1{,}0192 = 0{,}1512$$

- Desigualdad **INTRAGRUPOS** (dentro de los grupos):

$$\sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, T_g \equiv \sum_{g=1}^{2} p_g \,.\, T_g = (0{,}299).(0{,}0113) + (0{,}701).(0{,}446) = 0{,}0346$$

De este modo, el coeficiente de Theil:

$$T = \text{Ln}\,N + \sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, \text{Ln}\left[\frac{p_g}{N_g}\right] + \sum_{g=1}^{k} p_g \,.\, T_g = 0{,}1512 + 0{,}0346 = 0{,}1858$$

En términos relativos: $\dfrac{T}{0{,}1858} = \dfrac{0{,}1512}{0{,}1858} + \dfrac{0{,}0346}{0{,}1858} = 0{,}8138 + 0{,}1862 = 1$

De la desigualdad existente en las siete regiones vinícolas, el 81,38% es consecuencia a la desigualdad entre los grupos. A la hora de tomar medidas económicas para disminuir, aún más, la desigualdad, se actuaría en esta dirección, tratando de limar las diferencias entre los dos grupos (esta es una de las ventajas del análisis desagregado, permite determinar el origen de las diferencias existentes entre regiones, comunidades, etc.)

## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE SPEARMAN

A veces interesa hallar la correlación existente entre dos series de datos, en donde los valores de sus variables no vienen señalados por sus frecuencias absolutas, sino en el orden que ocupan en la observación. Para estudiar la situación descrita se utiliza el coeficiente de Spearman.

El coeficiente de correlación de Spearman $r_s$ estudia la correlación (asociación) entre dos variables (cuando ambas son de tipo discreto, o cuando no presentan una distribución parecida a la normal), se define:

$$r_s = 1 - \frac{6.\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\,.\,(n-1).(n+1)} \qquad -1 \le r_s \le 1$$

Para calcular el coeficiente $r_s$ hay que ordenar los datos en función de cada valor $x_i$ asignando rango a cada valor. Se repite la operación en función de cada valor $y_i$ asignado rango a cada valor. En esta línea, $d_i$ es la diferencia entre el orden obtenido por el individuo i-ésimo en ambas series de datos.

Cuando el coeficiente de correlación $r_s$ de Spearman presenta un valor cercano a cero se dice que ambas variables no presentan correlación (asociación).

Se plantean las hipótesis $\begin{cases} \text{Hipótesis nula:} & H_0 : r_s = 0 \\ \text{Hipótesis alternativa:} & H_a : r_s \neq 0 \end{cases}$ Se rechaza $H_0$ si $r_s \geq r_{crítico}$

La hipótesis nula $H_0$ (no existe correlación) se rechaza cuando el valor del coeficiente de correlación de Spearman $r_s$ calculado supera a un valor crítico $r_{crítico}$ del coeficiente de correlación de Spearman con determinado nivel de fiabilidad (tablas).

Es decir, se rechaza la hipótesis nula $H_0$ (no existe correlación) cuando $r_s \geq r_{crítico}$
En caso contrario, se acepta la hipótesis alternativa, concluyendo que existe correlación entre las variables con determinado grado de fiabilidad.

**Ejemplo:** Con la pretensión de averiguar si existe correlación en las asignaturas de Estadística y Macroeconomía se recogen las puntuaciones (números enteros) obtenidas por diez alumnos:

| | | Rangos puntuaciones | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Estadística | Macroeconomía | Estadística | Macroeconomía | $d_i$ | $d_i^2$ |
| 65 | 74 | 4 | 6 | -2 | 4 |
| 72 | 61 | 5 | 3 | 2 | 4 |
| 75 | 69 | 6 | 5 | 1 | 1 |
| 82 | 90 | 7 | 9 | -2 | 4 |
| 50 | 51 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 95 | 79 | 10 | 8 | 2 | 4 |
| 87 | 95 | 9 | 10 | -1 | 1 |
| 53 | 52 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 83 | 77 | 8 | 7 | 1 | 1 |
| 64 | 63 | 3 | 4 | -1 | 1 |
| | EXCEL: | =JERARQUIA(A1;A$1:A$10;1) | =JERARQUIA(B1;B$1:B$10;1) | | 20 |

$$r_s = 1 - \frac{6.\sum_{i=1}^{10} d_i^2}{n.(n-1).(n+1)} = 1 - \frac{6.20}{10.9.11} = 0{,}88$$

El coeficiente de correlación de Spearman es alto (próximo a 1), indicando una buena asociación de tipo discreto entre ambas variables (Estadística, Macroeconomía), es decir, las más altas puntuaciones en una de las variables correspondieron a las más altas puntuaciones en la otra y, complementariamente, las más bajas puntuaciones en una variable correspondieron a las más bajas puntuaciones de la otra.

Se plantean las hipótesis $\begin{cases} \text{Hipótesis nula:} & H_0 : r_s = 0 \\ \text{Hipótesis alternativa:} & H_a : r_s \neq 0 \end{cases}$ Se rechaza $H_0$ si $r_s \geq r_{crítico}$

Para un grupo de 10 estudiantes $(n = 10)$, el valor calculado de $r_s = 0{,}88$, con un nivel de confianza del 95% (p-valor=0,05), es superior al valor crítico de $r_{crítico} = 0{,}564$ ($r_s = 0{,}88 > r_{crítico} = 0{,}564$), rechazando la hipótesis nula y concluyendo que existe asociación directa entre los aciertos que obtuvieron los alumnos en las pruebas de Estadística y Macroeconomía.

## Valores críticos del coeficiente $r_s$

| | Nivel de significación | |
|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 |
| 4 | 1,000 | ------ |
| 5 | 0,900 | 1,000 |
| 6 | 0,829 | 0,943 |
| 7 | 0,714 | 0,893 |
| 8 | 0,643 | 0,833 |
| 9 | 0,600 | 0,783 |
| 10 | 0,564 | 0,746 |
| 12 | 0,506 | 0,712 |
| 14 | 0,456 | 0,645 |
| 16 | 0,425 | 0,601 |
| 18 | 0,399 | 0,564 |
| 20 | 0,377 | 0,534 |
| 22 | 0,359 | 0,508 |
| 24 | 0,343 | 0,485 |
| 26 | 0,329 | 0,465 |
| 28 | 0,317 | 0,448 |
| 30 | 0,306 | 0,432 |