Universidad Autónoma de Madrid

Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

En el mundo real hay fenómenos regidos por leyes determinadas, es decir, bajo condicionadas dadas. El resultado es previsible, salvo quizás por errores de medida; estos fenómenos denominan ***fenómenos deterministas***, un ejemplo de ellos puede ser la caída de un objeto desde determinada altura.

Frente a estos fenómenos existen otros muchos que no siguen unas leyes determinadas. Un fenómeno o experimento se dice ***aleatorio*** si puede dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser posible decir con certeza los resultados del mismo.

Los fenómenos aleatorios aparecen en muchas disciplinas científicas. Por ejemplo, en *Mercadotecnia* interesan las cantidades de cierta mercancía vendidas en días sucesivos; en *Física* se detecta la presencia de ruidos térmicos en un circuito eléctrico; en *Control de Calidad* interesa el número de ítems defectuosos producidos por cierta máquina; en *Medicina* el número de pacientes curados por cierto fármaco, etc.

Al describir un experimento aleatorio es esencial especificar qué aspecto del resultado interesa observar, es decir, cuál es el criterio para considerar dos resultados como diferentes. Esta especificación se logra mediante el *espacio muestral*.

ESPACIO MUESTRAL.- Dado un experimento aleatorio, el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados diferentes (que se desean considerar diferentes) del mismo, se conoce como espacio muestral asociado al experimento aleatorio, se denota por Ω.

Se presentan diversos tipos de espacios muestrales:

a) En el lanzamiento de un dado se puede tomar como espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) En el experimento aleatorio que describe el número de automóviles que cruzan un puente de peaje en un período dado, el espacio muestral es del tipo $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\}$

c) En el caso de elegir al azar un número real en el intervalo $[0, 1]$, el espacio muestral asociado es precisamente $\Omega = [0, 1]$

Atendiendo al número de resultados posibles de un experimento aleatorio se pueden establecer los siguientes tipos de espacios muestrales:

a) Espacios muestrales finitos: Son aquellos que tienen un número finito de elementos, como puede ser la tirada de un dado.

b) Espacios muestrales infinitos numerables: Son aquellos en los que Ω tiene un número infinito de elementos y puede ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales, como pude ser el número de automóviles que pasan por el puente de peaje.

c) Espacios muestrales infinitos no numerables: Son aquellos en los que Ω tiene un número infinito de elementos y no puede ponerse en correspondencia con los números naturales, como puede ser la elección al azar de un número en el intervalo $[0, 1]$.

SUCESOS.- Un suceso asociado a un experimento aleatorio corresponde a la cuestión de que tenga o no tenga respuesta después de realizado el experimento.

En el lanzamiento de dos monedas, el espacio muestral asociado, siendo $C = \text{cara}$ y $X = \text{cruz}$: $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

¿Es el número de caras menor o igual que uno?. La pregunta tiene respuesta y es, por tanto, un ***suceso***. El subconjunto de Ω que responde afirmativamente a la pregunta es $A = \{CX, XC, XX\}$

Pudiendo definir un suceso de un experimento aleatorio como un subconjunto del espacio muestral, $A \subset \Omega$, es decir, una colección de puntos del espacio muestral.

OPERACIONES CON SUCESOS.- Para definir 'algo' que mida la aleatoriedad que dentro de sí llevan los sucesos de un experimento aleatorio es necesario construir una estructura matemática. Para ello se definen ciertas operaciones con los sucesos.

- **Unión de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la unión de A y B, que se representa por $A \cup B$, a otro suceso que se denota por C, que ocurre siempre que ocurra A o siempre que ocurra B: $A \cup B = C$
- **Intersección de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la intersección de A y B, que se representa por $A \cap B$, a otro suceso que se denota por D, que ocurre siempre que ocurran A y B simultáneamente: $A \cap B = D$
- **Suceso complementario:** Dado un suceso A, de cierto experimento aleatorio, se define el complementario de A, que se representa por $\overline{A}$ ó A^C, a otro suceso que ocurre siempre que no ocurre A.
- **Suceso imposible:** Dado el suceso A y su complementario $\overline{A}$, junto con la operación de intersección, se define un suceso que no ocurre nunca, se le conoce como suceso imposible y se denota por ϕ: $A \cap \overline{A} = \phi$
  El suceso complementario del suceso imposible es el suceso seguro, que es precisamente el espacio muestral: $\overline{\phi} = \Omega$
- **Sucesos incompatibles:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se dice que estos sucesos son incompatibles si su intersección es el suceso imposible.
  $A \cap B = \phi \quad \mapsto \quad A \text{ y } B$ *incompatibles*
- **Sucesos contenido en otro:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se dice que A está contenido en B si siempre que ocurre A ocurre B, se denota por $A \subset B$.
  Se observa que dado cualquier suceso A, siempre ocurre $\phi \subset A \subset \Omega$
- **Diferencia de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la diferencia de los sucesos A y B, y se denota por $A - B$, el suceso C, que ocurra A y no ocurra B: $C = A - B$. Se observa que $C = A - B = A \cap \overline{B}$
- **Sucesos elementales:** Dado un suceso puede ocurrir que éste pueda ser descompuesto en sucesos más simples, de forma que la unión de éstos sea precisamente el suceso considerado. A estos sucesos se les llama sucesos compuestos.
  Por otra parte, existen otros sucesos que no pueden ser descompuestos en sucesos más simples, estos sucesos reciben el nombre de sucesos elementales.

PROPIEDADES DE LA UNIÓN e INTERSECCIÓN DE SUCESOS:

- **Conmutativas** $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

- **Asociativas** $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

- **Distributivas** $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

- **Elemento neutro** $\begin{cases} \phi \text{ para la unión}: A \cup \phi = A \\ \Omega \text{ para la intersección}: A \cup \Omega = A \end{cases}$

ÁLGEBRA DE BOOLE: Sea M un conjunto cualquiera, la clase de sus subconjuntos que verifica las condiciones de contener a M, *estabilidad para las operaciones de unión y complementación de subconjuntos de M*, recibe el nombre de *álgebra de Boole*.

- Sea $C(M)$ una clase de subconjuntos de M, se dice que $C(M)$ es un álgebra de Boole si verifica:

  a) $M \in C(M)$
  b) Si $A, B \in C(M) \Rightarrow A \cup B \in C(M)$
  c) Si $A \in C(M) \Rightarrow \overline{A} \in C(M)$

Sea el conjunto Ω que es el espacio muestral y una clase formada por los sucesos que son subconjuntos de Ω, verificando:

a) $\Omega \in C(\Omega)$, *ya que Ω es un suceso, el suceso seguro*
b) Si $A, B \in C(\Omega) \Rightarrow A \cup B \in C(\Omega)$ *es otro suceso*
c) Si $A \in C(\Omega) \Rightarrow \overline{A} \in C(\Omega)$ *es otro suceso*

La clase formada por los sucesos de un experimento aleatorio tiene estructura de álgebra de Boole, a ésta se la llama <u>*álgebra de Boole de sucesos*</u> y se denota por $\mathbb{Q}$

En el caso de que el espacio muestral Ω sea infinito (numerable o no numerable), se considera una estructura más amplia, que es la *σ - álgebra* de sucesos, y en la que la diferencia esencial con el álgebra de sucesos es que la unión infinita numerable de sucesos es otro suceso.

Es decir, la clase de sucesos $\mathbb{A}$ es un *σ - álgebra* sí

a) $\Omega \in \mathbb{A}$
b) Si $A \in \mathbb{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathbb{A}$
c) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$

A la terna $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ se le llama **espacio probabilístico** asociado a un experimento aleatorio.

Una variable aleatoria ξ es una función definida sobre el espacio muestral Ω (conjunto de resultados de un experimento aleatorio) que toma valores en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, es decir:

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\longrightarrow \xi(\omega) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Una variable aleatoria puede ser discreta o continua según sea el rango de esta función.

En términos matemáticos con rigor, dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ asociado a un experimento aleatorio, una función $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si $\forall x \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\omega \in \Omega / \xi(\omega) \leq x\} \in \mathbb{A}$

FRECUENCIA DE UN SUCESO: El objetivo es definir sobre el álgebra de Boole de sucesos $\mathbb{Q}$ una función que indique una medida de la certeza o incertidumbre en la ocurrencia de los sucesos del experimento aleatorio.

Dado un suceso $A \in \mathbb{Q}$, esto es, un suceso perteneciente al álgebra de sucesos de un experimento aleatorio, la frecuencia absoluta del suceso *A* en una serie de *n* repeticiones similares del experimento, se denota por n_A.

La frecuencia relativa del suceso *A* es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces que se realiza el experimento, denotándose por f_A:

$$f_A = \frac{n_A}{n} \begin{cases} 0 \leq f_A \leq 1 & \textit{para cualquier suceso} \\ f_\Omega = 1 & \textit{suceso seguro} \\ f_\phi = 0 & \textit{suceso imposible} \end{cases}$$

Si dos sucesos A y B son incompatibles, $A \cap B = \phi$, siendo n_A la frecuencia absoluta de A y n_B la frecuencia absoluta de B, se tiene que la frecuencia absoluta de $A \cup B$ es

$n_{A\cup B} = n_A + n_B$, teniendo: $f_{A\cup B} = \dfrac{n_{A\cup B}}{n} = \dfrac{n_A + n_B}{n} = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n_B}{n} = f_A + f_B$

Es decir, $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ si $A \cup B = \phi$

PROBABILIDAD: Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral Ω y álgebra de sucesos asociada $\mathbb{Q}$, la <u>probabilidad</u> se define como una aplicación del álgebra de sucesos $\mathbb{Q}$ en el intervalo $[0, 1]$, que verifica los tres axiomas siguientes:

$$P : \mathbb{Q} \longrightarrow [0, 1] \quad \begin{cases} P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{Q} \\ P(\Omega) = 1 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad A, B \in \mathbb{Q} \;\; \text{con } A \cap B = \phi \end{cases}$$

Consecuencias de los Axiomas:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \;\; \forall A \in \mathbb{Q}$ $\quad \begin{cases} P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \;\; \mapsto \;\; P(\overline{A}) = 1 - P(A) \\ f_{\overline{A}} = 1 - f_A \end{cases}$

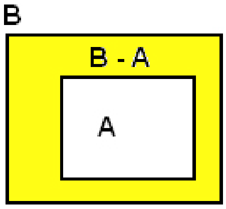
- $P(\phi)=0 \quad \{P(\phi)=1-P(\Omega)=1-1=0$

- Si $A \subset B \quad \mapsto \quad P(A) \le P(B)$

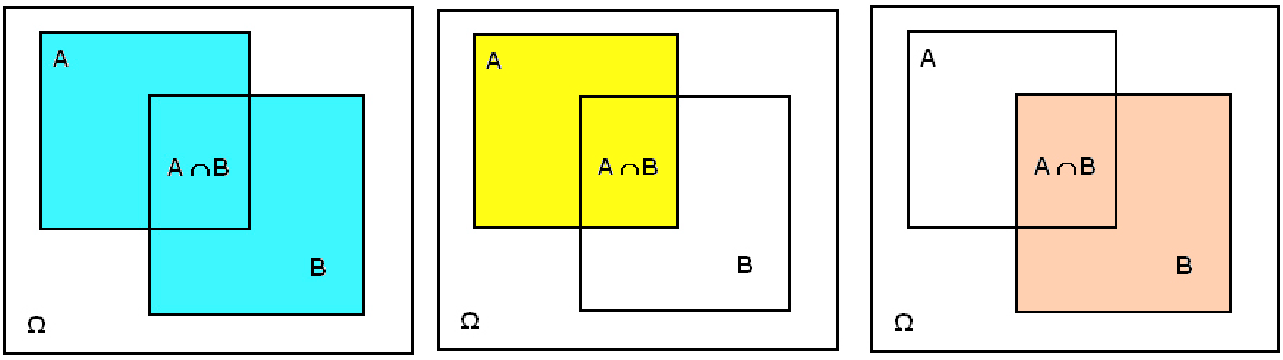
Si $A \subset B \;\Rightarrow\; B = A \cup (B-A)$ con $A \cap (B-A)=\phi$

$P(B)=P(A)+P(B-A)$ con $P(A)\ge 0$ y $P(B-A)\ge 0$

con lo cual, $P(B) \ge P(A)$



- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad \forall\, A,B \in \mathcal{Q}$



$A=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}) \quad \mapsto \quad P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$

$B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B) \quad \mapsto \quad P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

Siendo $\begin{cases} \overline{B}\subset A & \mapsto \quad P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B) \\ \overline{A}\subset B & \mapsto \quad P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B) \end{cases}$ resulta,

$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A\cap B)+\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]$

obteniendo, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad \forall\, A,B\in \mathcal{Q}$

Cuando los sucesos *A* y *B* son incompatibles, $A\cap B=\phi$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

- Leyes de Morgan $\begin{cases} \overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B} \\ \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B} \end{cases}$

PROBABILIDAD CONDICIONADA: Dado un suceso $A\in\mathcal{Q}$ con $P(A)>0$, para cualquier otro suceso $B\in\mathcal{Q}$, se define la probabilidad del suceso *B* condicionado al suceso *A:*

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

INDEPENDENCIA: Los sucesos $A, B \in \mathcal{Q}$ son independientes sí $P(B/A) = P(B)$

Es decir, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \mapsto \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$

La expresión $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ se toma como definición de independencia.

Para tres sucesos $A, B, C \in \mathcal{Q}$ la definición analítica es que sean independientes dos a dos y luego los tres juntos, esto es, que se verifiquen las relaciones:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B) \,.\, P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea un conjunto de sucesos $\{A_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$, $A_i \in \mathbb{Q}$, tales que verifican las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \\ A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

Esto es, la unión de todos ellos es el suceso seguro y son incompatibles dos a dos.

Un conjunto de sucesos con estas dos propiedades recibe el nombre de <u>sistema completo de sucesos</u>.

Sea un suceso cualquiera $B \in \mathcal{Q}$ y un sistema completo de sucesos $\{A_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$, tales que $P(A_i) > 0 \ \forall i$. El <u>Teorema de la Probabilidad Total</u> establece que:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \,.\, P(B/A_i)}$$

En efecto, $B = B \cap \Omega$ siendo $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Los sucesos $(B \cap A_i)$ son disjuntos por serlo los sucesos $\{A_i\}$, resulta, por tanto:

$$P(B) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Como $P(B/A_i) = \dfrac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \quad \leftrightarrow \quad P(B \cap A_i) = P(A_i) \,.\, P(B/A_i) \ \ \forall i$

Sustituyendo se tiene: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \,.\, P(B/A_i) \ \ \forall i$

TEOREMA DE BAYES: Con las mismas condiciones que el teorema de la probabilidad total, se desea conocer la probabilidad de que habiendo ocurrido el suceso *B* la causa que lo produzca sea el suceso A_j, es decir, se desea calcular $P(A_j/B)$

El teorema de Bayes establece que $\boxed{P(A_j/B)=\dfrac{P(A_j)\,.\,P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,.\,P(B/A_i)}}$

En efecto,

$$P(A_j/B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)} \quad y \quad P(B/A_j)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(A_j)} \;\mapsto\; P(A_j\cap B)=P(A_j)\,.\,P(B/A_j)$$

se tiene, $P(A_j/B)=\dfrac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)\,.\,P(B/A_j)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)\,.\,P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,.\,P(B/A_i)}$

HERRAMIENTAS EN EL ESTUDIO DE EXPERIMENTOS ALEATORIOS

- **Combinaciones de m elementos tomados de n en n:** Es el conjunto de todas las disposiciones que se pueden formar tomando *n* elementos entre los *m*, con la condición que dos disposiciones serán distintas sí y sólo sí están formadas por elementos distintos, es decir, no se tiene en cuenta el orden de los elementos en la disposición.

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,.\,(m-n)!} \quad \text{donde} \quad m!=m\,.\,(m-1)\,.\cdots.\,3\,.\,2\,.\,1$$

- **Variaciones de m elementos tomados de n en n:** Es el conjunto de todas las disposiciones que se pueden formar tomando *n* elementos de entre los *m* elementos, con la condición de que dos disposiciones serán distintas si están formadas por elementos distintos o si los elementos están dispuestos en orden distinto dentro de la disposición, esto es, se tiene en cuenta el orden de los elementos en la disposición.

$$V_{m,n}=m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\;\cdots\;.\,(m-n+1)$$

- **Permutaciones de m elementos:** Es un caso particular de las variaciones, son variaciones de *m* elementos tomados de *m* en *m*.

$$P_m=V_{m,m}=m!=m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\;\cdots\;.\,3\,.\,2\,.\,1$$

- **Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n:** Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar tomando *n* elementos entre los *m* elementos, en los que eventualmente pueden aparecer elementos repetidos, con la condición de que dos disposiciones serán distintas si tienen distintos elementos o están situados en distintos lugares, esto es, se tiene en cuenta el orden de los elementos en las disposiciones.

$$V_m^n=m^n$$

- **Permutaciones con repetición:** Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar con *m* elementos, en los que en cada disposición cada elemento puede aparecer $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ veces y en un orden determinado.

$$RP_n = \frac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\cdots n_m!} \quad \text{donde } n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

- **Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n:** Es el conjunto de todas las disposiciones distintas que se pueden formar tomando *n* elementos entre los *m* elementos, en donde eventualmente pueden aparecer elementos repetidos, con la condición de que dos disposiciones serán distintas si tienen distintos elementos, es decir, no se tiene en cuenta el orden de la disposición.

$$RC_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,.\,(m-1)!}$$