PORTAL ESTADÍSTICA APLICADA

Video Contrastes | Algebra Lineal | Decisiones en Bolsa | Matrices Determinantes | Métodos Integración | Ecuaciones Diferenciales

SISTEMAS NUMERACIÓN

Destrezas Matemáticas

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten representar datos numéricos. En un sistema de numeración posicional la norma principal es que un mismo símbolo tiene distinto valor según la posición que tenga.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten representar datos numéricos. En un sistema de numeración posicional la norma principal es que un mismo símbolo tiene distinto valor según la posición que tenga.

SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El sistema de numeración decimal es el que se utiliza habitualmente, se compone de diez símbolos o dígitos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ a los que se da un valor *dependiendo de la posición que ocupen*: unidades, decenas, centenas, millares, etc.

El valor de cada dígito está asociado al de una potencia de base 10, número que coincide con la cantidad de símbolos o digitos del sistema decimal, y un exponente igual a la potencia que ocupa el dígito menos 1, a partir de la derecha.

El número 435 en el sistema decimal significa: 4 centenas + 3 decenas + 5 unidades
Es decir, $400+30+5$ o lo que es equivalente: $4.10^2+3.10+5$

Cuando el número tiene decimales es una situación análoga. En este caso, los digitos colocados a la derecha del separador decimal se expresan mediante potencias negativas.

El número 8765,43:
8 millares + 7 centenas + 6 decenas + 5 unidades + 4 décimos + 3 céntimos
$$8765,43=8.000+700+60+5+0,4+0,03=8.10^3+7.10^2+6.10+5+4.10^{-1}+3.10^{-2}$$

Hallar un número de tres cifras, sabiendo que suman 9, que si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras la diferencia es 198, y que además la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

El número $N = xyz = 100x + 10y + z \quad , \qquad N' = zyx = 100z + 10y + x$

$x + y + z = 9$

$N - N' = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 198$

media aritmética : $2y = x + z \;\mapsto\; x - 2y + z = 0$

Resulta el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \mapsto \begin{array}{l} \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \end{array} \mapsto \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3y = 9 \end{cases}$

$x = 4 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = 2 \;\mapsto\; \boxed{N = 432}$

NÚMEROS CONGRUENTES

Dos números enteros a y b se dice que son congruentes respecto de un número natural (entero positivo) llamado *módulo m* si las divisiones (a/m) y (b/m) dan el mismo resto. Se denota $\boxed{a \equiv b \ \text{mód } m}$

Los números 13 y 17 son congruentes *módulo 4 ,* puesto que (13/4) da 3 de cociente y 1 de resto. Del mismo modo, (17/4) da 4 de cociente y 1 de resto. Por tanto, $\boxed{13 \equiv 17 \ \text{mód } 4}$

⊙ **La diferencia de dos números congruentes respecto del *módulo m* es múltiplo de *m.***

Los números 37 y 51 son congruentes *módulo 7 :* $37 \equiv 51 \ \text{mód } 7$

$37 = 7.5 + \boxed{2} \quad 51 = 7.7 + \boxed{2} \quad 51 - 37 = 7.\boxed{2}$

⊙ **Si a dos números a y b congruentes *módulo m* se suman o restan un mismo número k, los numeros resultantes** $(a \pm k)$ **y** $(b \pm k)$ **siguen siendo congruentes.**

Cuando se dice que los números 66 y 198 son *divisibles* por 33, significa que 66 y 198 son congruentes *mód 33* ya que el resto es cero.

Sumando 7 a ambos números se obtienen los números 73 y 205, que son también congruentes respecto a 33, $73 \equiv 205 \ \text{mód } 33$ **, pues ambos dan de resto 7.**

Demostrar que $(2^{6n+2} - 4)$ es divisible por 18 , para todo número natural n

Se tiene que,

$2^6 = 64 \equiv 1 \text{ mód } 9$

$2^{6n} \equiv 1 \text{ mód } 9 \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \cdots, n$

$2^{6n+2} \equiv 4 \text{ mód } 18$ *por ser pares los dos miembros de la congruencia*

$2^{6n+2} - 4 \equiv 0 \text{ mód } 18 \quad \mapsto \quad (2^{6n+2} - 4)$ es divisible por 18

SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIO

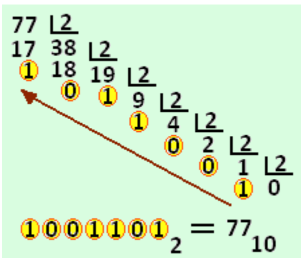
El sistema de numeración binario utiliza sólo dos dígitos: 0 y 1 , que tienen distinto valor dependiendo de la posición que ocupen.
El valor de cada posición es el de una potencia en base 2, elevada a un exponente igual a la posición del dígito menos 1.

Para representar los números, como en el sistema decimal, la base de la potencia coincide con la cantidad de dígitos utilizados (2).
En esta línea, el número binario $\boxed{1011}$ tiene el siguiente valor:

$$1011_2 = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1 = 11_{10}$$

CONVERSIÓN DE DECIMAL A BINARIO

Se realizan divisiones sucesivas por 2 y se colocan los restos obtenidos en cada una de ellas. Para construir el número binario se eligen los *restos en orden inverso* al que han sido obtenidos. Sea el número 77:



Para representar en forma binaria el número 77 se han necesitado siete digitos.
Teniendo en cuenta que $2^8 = 256 \mapsto \boxed{255}$ es el número más grande que puede representarse con 8 dígitos.

Recordar que los números binarios que pueden respresentarse con *n dígitos* es 2^n, y el mayor de esos números es una *unidad menos*, es decir $(2^n - 1)$.

Se ha visto que transformar un número binario al decimal es un procedimiento sencillo, basta con desarrollar el número, considerando que el valor de cada dígito está asociado a una potencia de 2, el exponente 0 queda asociado al bit situado más a la derecha, incrementándose en una unidad según avanzan posiciones hacia la izquierda: En esta línea:

$$1001101_2 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1.2^0 = 77_{10}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS BINARIOS
1 + 1 = 2 arrastro una unidad a la izquierda

$$\begin{cases} 010_2 = 0.2^2 + 1.2 + 0.2^0 = 2_{10} \\ 101_2 = 1.2^2 + 0.2 + 1.2^0 = 5_{10} \end{cases} \mapsto \begin{array}{r} 0\ \ 1\ \ 0 \\ +\ \ 1\ \ 0\ \ 1 \\ \hline 1\ \ 1\ \ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 2_{10} \\ +\ \ 5_{10} \\ \hline 7_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2_{10} \\ +\ \ 3_{10} \\ \hline 5_{10} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \boxed{1} \\ +\ \ 0\ \ 1\ \ 0 \\ +\ \ 0\ \ 1\ \ 1 \\ \hline 1\ \ 0\ \ 1 \end{array} \leftarrow \begin{rcases} 010_2 = 0.2^2 + 1.2 + 0.2^0 = 2_{10} \\ 011_2 = 0.2^2 + 1.2 + 1.2^0 = 3_{10} \end{rcases}$$

RESTA: Se resuelve igual que en el sistema decimal, tomando una unidad prestada a la posición siguiente: $0_2 - 1_2 = 2_2 - 1_2 = 1_2$

La unidad prestada debe devolverse, sumándola a la posición siguiente.

$$\begin{array}{r} 1\ \ 0\ \ 1 \\ -\ \ 0\ \ 1\ \ 1 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{r} 1\ \ \boxed{2}\ \ 1 \\ -\ \ \boxed{1}\ \ 1\ \ 1 \\ \hline 0\ \ 1\ \ 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 5_{10} \\ -\ \ 3_{10} \\ \hline 2_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1 \\ -\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{r} 1\ \ 1\ \ \boxed{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \boxed{2}\ \ \boxed{2}\ \ 1 \\ -\ \ 1\ \ \boxed{1}\ \ 1\ \ \boxed{1}\ \ \boxed{0}\ \ \boxed{1}\ \ 1\ \ 1 \\ \hline 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0 \end{array}$$

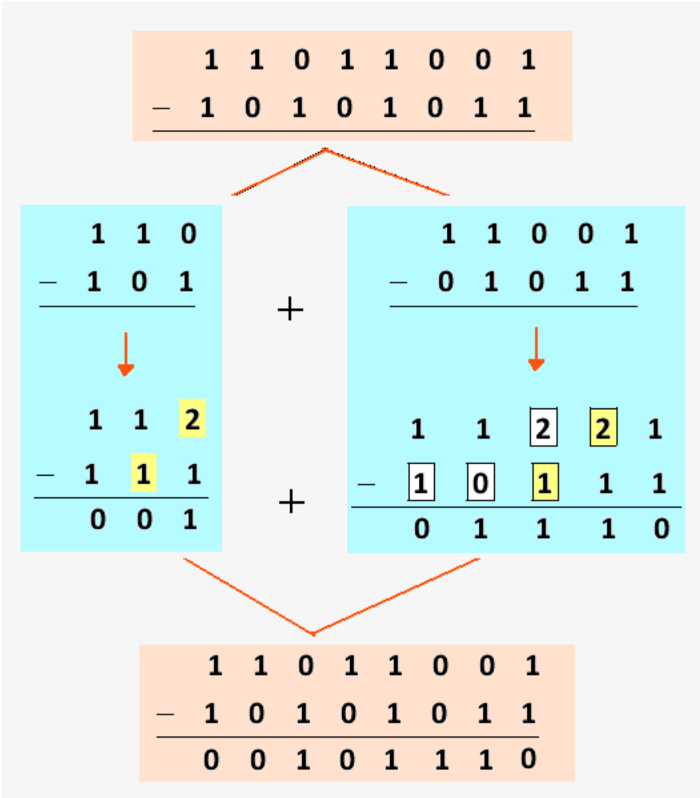
Se comprueba,

$$1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1_2 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1 = 217_{10}$$

$$1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 + 1 = 171_{10}$$

$$0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 0 = 46_{10}$$

Para simplificar la resta y reducir la posibilidad de cometer un error, se pueden fraccionar las expresiones largas en cortas. En este sentido,



Se define el *complemento a dos* de un número N, con n cifras, como $\boxed{C_2^N = 2^n - N}$

Sea $N = 101101_2 = 45_{10}$ con n = 6 cifras: $C_2^{45} = 45_{10} = 2^6 - 45 = 19_{10} = 010011_2$

Por definición, el *complemento a uno* de un número N, con n cifras, es una unidad menor que el *complemento a dos*, es decir: $\boxed{C_1^N = C_2^N - 1}$

Partiendo de $C_2^{45} = 45_{10} = 2^6 - 45 = 19_{10} = 010011_2$

$$C_1^{45} = C_2^{45} - 1 = 45_{10} - 1 = (2^6 - 45) - 1 = 19_{10} - 1 = 010011_2 - 000001_2 = 010010_2$$

Adviértase que: $\begin{cases} N = 101101_2 \\ C_1^{45} = 010010_2 \end{cases}$

El *complemento a uno* de un número binario es el resultado de invertir UNOS y CEROS.

En otras palabras,

Dado el número binario $N = 101101_2 \;\mapsto\; C_1^{45} = 010010_2 \;\mapsto\; C_2^{45} = 010011_2$

Restar:

$1011011_2 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 91_{10}$ de $0101110_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 = 46_{10}$

teniendo que resultar: $91_{10} - 46_{10} = 45_{10}$

$$\begin{array}{r} 1\;0\;1\;1\;0\;1\;1 \\ -\;0\;1\;0\;1\;1\;1\;0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;\boxed{2}\;1\;1\;\boxed{2}\;1\;1 \\ -\;\boxed{1}\;1\;\boxed{1}\;\boxed{0}\;1\;1\;0 \\ \hline 0\;1\;0\;1\;1\;0\;1 \end{array}$$

$101101_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 1 = 45_{10}$

La resta presenta alguna dificultad cuando se acumulan arrastres.

Considerando que $2^n = N + C_2^N$, la resta puede transformarse en una suma considerando el *complemento a dos* del sustraendo, es decir, el *complemento a dos* de 0101110_2

$$0101110_2 \;\mapsto\; C_1^N = 1010001_2 \;\mapsto\; C_2^N = C_1^N + 1 = 1010010_2$$

con lo cual,

$$\begin{array}{r} 1\;0\;1\;1\;0\;1\;1 \\ -\;0\;1\;0\;1\;1\;1\;0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;0\;1\;1\;0\;1\;1 \\ +\;1\;0\;1\;0\;0\;1\;0 \\ \hline \boxed{\cancel{1}}\;0\;1\;0\;1\;1\;0\;1 \end{array}$$

En la suma sobra un **bit** por la izquierda. Como el número resultante no puede ser más grande que el minuendo, el **bit sobrante** se desprecia.

El Producto sólo puede ser 0 ó 1

x	0	1
0	0	0
1	0	1

El producto se realiza mediante sumas sucesivas, con el problema de que la suma de dos 1 origina un arrastre.

Para ello, se cuenta el número de unos y de arrastres en cada columna:

- Si el número de UNOS es par la suma es un CERO.
- Si el número de UNOS es impar la suma es un UNO.

Se cuentan las parejas de UNOS para determinar los arrastres a la posición superior.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \times & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$10110_2 = 2^4 + 2^2 + 2 = 22_{10}$

$1001_2 = 2^3 + 1 = 9_{10}$

$11000110_2 = 2^7 + 2^6 + 2^2 + 2 = 198_{10}$

$\mapsto$ $10110_2 \times 1001_2 = 11000110_2$

$22_{10} \times 9_{10} = 198_{10}$

En sistemas electrónicos, donde se opera con números mayores, se utiliza el método conocido como Algoritmo de Booth.

La división en binario es similar a la decimal, la única diferencia es que al hacer las restas, dentro de la división, deben realizarse en binario.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 110 \\
- & 1 & 1 & 0 & & & & \overline{111} \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & - & 1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & \\
 & & - & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

$101010 = 2^5 + 2^3 + 2 = 42$

$110 = 2^2 + 2 = 6$

$111 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \underline{1\ 1\ 0\ 1} \\
\underline{-1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & & & & & & 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & \underline{-1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & & & \underline{-1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

$100010010_2 = 2^8 + 2^4 + 2 = 274_{10}$ $\quad 10101_2 = 2^4 + 2^2 + 1 = 21_{10}$

$1101_2 = 2^3 + 2^2 + 1 = 13_{10}$ $\quad 0001_2 = 1_{10}$

$274_{10} = 13_{10} \times 21_{10} + 1_{10}$

SISTEMA DE NUMERACIÓN OCTAL Y HEXADECIMAL

La codificación binaria presenta el inconveniente de números muy lagos, motivo por el que se utilizan otros sistemas de numeración más cómodos de escribir: el *sistema octal* y el *sistema hexadecimal*. Convertir un número binario a octal o hexadecimal es una operación sencilla.

El *sistema de numeración octal* se representa mediante ocho dígitos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Cada número tiene un valor distinto dependiendo del lugar que ocupe. El valor de cada una de las posiciones queda determinado por las potencias de base 8.

La conversión de un número decimal a octal se efectúa de forma similaral de los números binarios, esto es, divisiones sucesivas por 8 y colocando los restos obtenidos en orden inverso.

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & 3 & 2 & \underline{8} \\
 & 5 & 2 & 16 \;\; |\underline{8} \\
 & & 4 & \;\; 0 \;\;\;\; 2
\end{array}
$$

$132_{10} = 204_8$

$204_8 = 2.8^2 + 0.8 + 4 = 132_{10}$

El *sistema de numeración hexadecimal* se representa con dieciséis símbolos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Los caracteres A, B, C, D, E, F representan: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15, ya que en el sistema decimal no hay digítos mayores que 9.

El valor de cada símbolo depende de su posición, que se expresa en potencias de base 16.

1735 | 16
135 | 108
7 | 12 ⇓ C | 6 | 16 | 0

$1735_{10} = 6C7_{16}$

$6C7_{16} = 6.16^2 + C = 12\ .16 + 7 = 1735_{10}$

Poner en base decimal $2A3C_{16}$

$2A3C_{16} = 2.16^3 + A = 10\ .16^2 + 3.16 + C = 12\ .16^0 = 10.812_{10}$

10812 | 16
121 | 675 | 16
92 | 35 | 42 | 16
C = 12 | 3 | A = 10 | 2 | 16 | 0

Cada dígito en el sistema OCTAL equivale a tres dígitos BINARIOS.

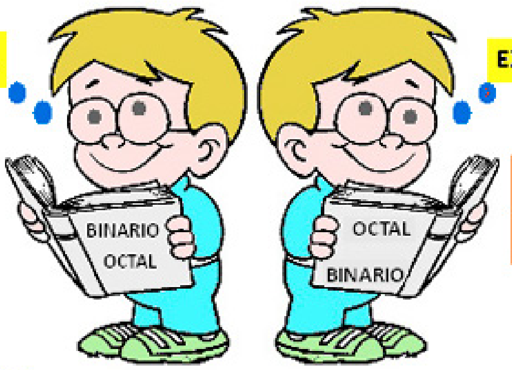
Cada dígito HEXADECIMAL equivale a cuatro dígitos BINARIOS.

CONTRAER ...

Se contraen grupos de tres caracteres BINARIOS al correspondiente dígito OCTAL

1 0 1	0 0 1	0 1 1_2
5	1	3_8

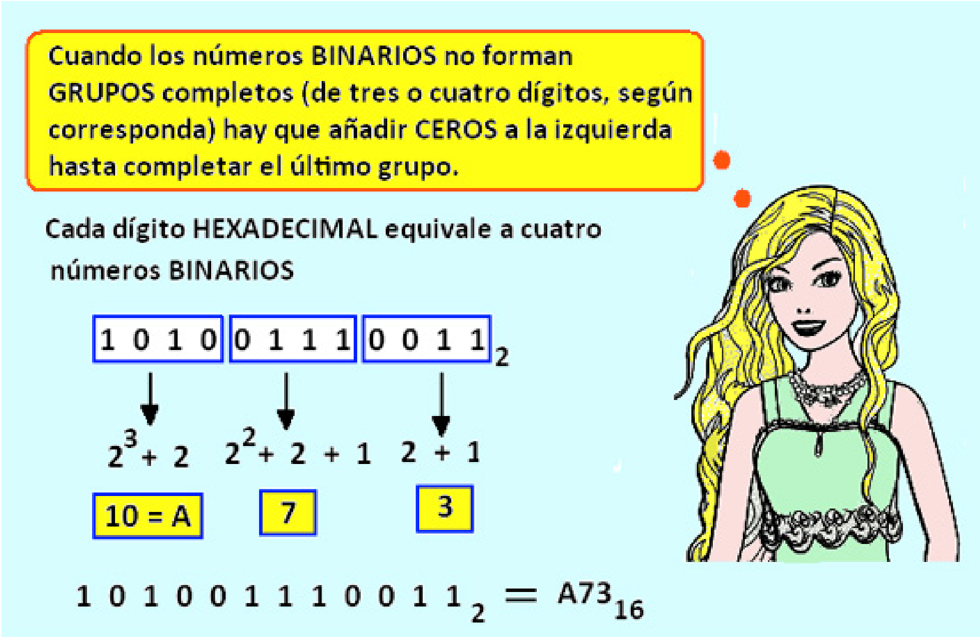
$101001011_2 = 513_8$



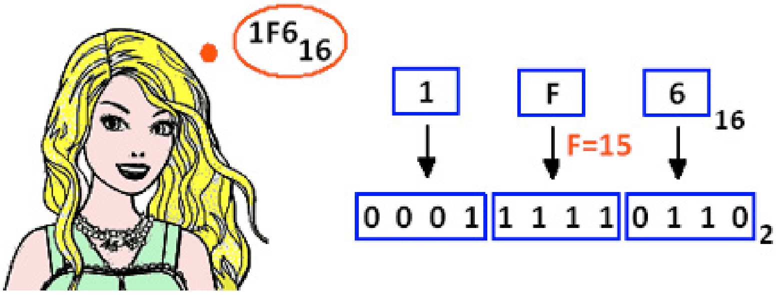
EXPANDIR ...

7	5	0_8
1 1 1	1 0 1	0 0 0_2

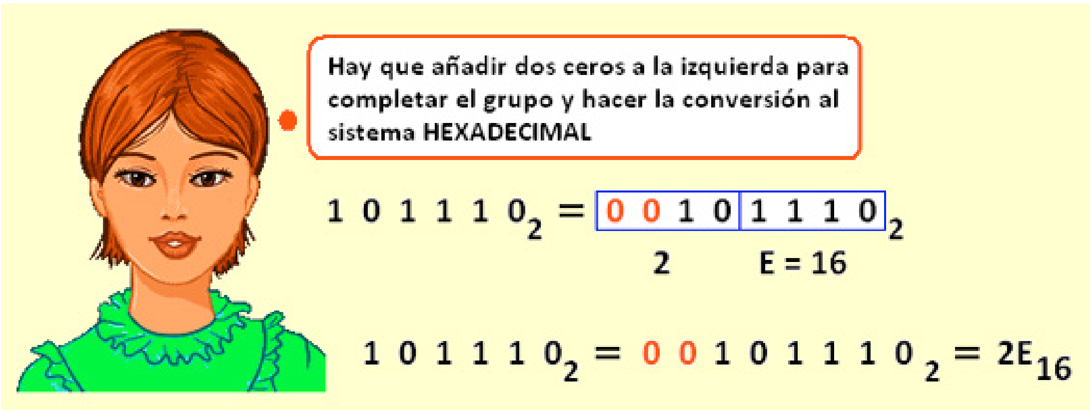
$750_8 = 111101000_2$



Cuando los números BINARIOS no forman GRUPOS completos (de tres o cuatro dígitos, según corresponda) hay que añadir CEROS a la izquierda hasta completar el último grupo.
Cada dígito HEXADECIMAL equivale a cuatro números BINARIOS
1 0 1 0 | 0 1 1 1 | 0 0 1 1 $_2$
$2^3 + 2$
$2^2 + 2 + 1$
$2 + 1$
10 = A
7
3
$1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1_2 = A73_{16}$



$1F6_{16}$
1 | F | 6 $_{16}$
F=15
0 0 0 1 | 1 1 1 1 | 0 1 1 0 $_2$



Hay que añadir dos ceros a la izquierda para completar el grupo y hacer la conversión al sistema HEXADECIMAL
$1\,0\,1\,1\,1\,0_2 = 0\,0\,1\,0\,|\,1\,1\,1\,0_2$
2
E = 16
$1\,0\,1\,1\,1\,0_2 = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0_2 = 2E_{16}$