2010

CANGURO MATEMÁTICO

Portal Fuenterrebollo

1. Sara escoge un número, lo divide por 7, al resultado le suma 7 y finalmente multiplica la suma por 7. De esta manera consigue el número 777. ¿Cuál número fue el que escogió?

A) 7 B) 111 C) 567 D) 722 E) 728

Solución:

El número que desconoce Sara se representa por la variable x, estableciendo la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{x}{7}+7\right].7=777 \quad \mapsto \quad \left[\frac{x+49}{\cancel{7}}\right].\cancel{7}=777 \quad \mapsto \quad x=777-49=728$$

2. Juan obtuvo el 85% del total de puntos de un examen. Rodrigo obtuvo el 90% del total de puntos del mismo examen. Si Rodrigo solamente obtuvo un punto más que Juan, ¿cuál era el total de puntos en este examen?

A) 5 B) 17 C) 18 D) 20 E) 25

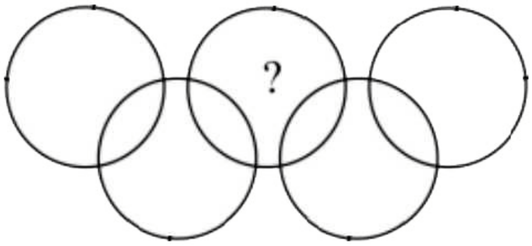
Solución:

Sea x = "cantidad de puntos obtenida por Juan" e y = "cantidad total de puntos"

$$\begin{cases} x=0,85\,.\,y \\ x+1=0,9\,.\,y \end{cases} \xrightarrow{\text{sustituyendo}} 0,85\,.\,y+1=0,9\,.\,y$$

$$1=0,05\,.\,y \quad \mapsto \quad y=\frac{1}{0,05}=\boxed{20}$$

3. En la figura de abajo hay nueve regiones dentro de los círculos. Coloca todos los números del 1 al 9, exactamente uno en cada región, de tal manera que la suma de los números dentro de cada círculo sea 11.

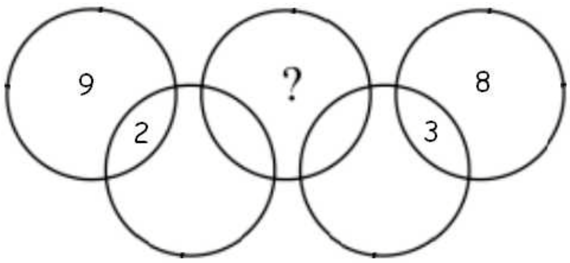


¿Qué número debe de ser colocado en la región con el signo de interrogación?

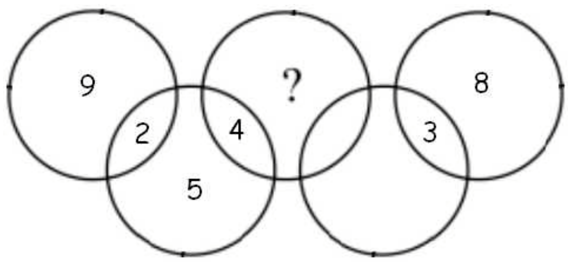
A) 7 B) 2 C) 6 D) 9 E) 3

Solución:

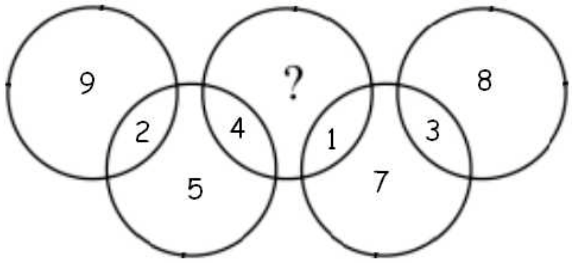
Se comienza colocando el número 9 en uno de los círculos extremos, puesto que al ser el número más grande, sólo se puede combinar con el número 2 para que la suma dentro del círculo sea 11. El segundo número más grande es el 8, que debe colocarse en el otro extremo, siendo su única posible combinación el número 3.



Para completar el completar el círculo que ya tiene el $\boxed{2}$ se necesitan dos números que sumen 9. Se disponen de los números $\{1,\ 4,5,6,7\}$, pudiendo utilizarse sólo el $\{4,5\}$, se colocan de la forma:



Para completar el círculo que contiene el $\boxed{3}$, sólo quedan los números $\{1,\ 6,7\}$, pudiendo utilizar solo el 1 y el 7, dado que $3+1+7=11$



El número que debe colocarse en el signo de interrogación es el $\boxed{6}$

4. La Biblioteca Escolar que visitan Eduardo, Laura y Beatriz posee una gran cantidad de libros. Su maestra dice: "Hay aproximadamente 2010 libros", e invita a los tres estudiantes a adivinar el número exacto. Eduardo dijo 2010, Laura dijo 1998 y Beatriz dijo 2015. La maestra dice que la diferencia entre los números que ellos dijeron y el valor exacto son 12, 7 y 5 pero no en ese mismo orden. ¿Cuántos libros hay en la Biblioteca?

A) 2003 B) 2005 C) 2008 D) 2020 E) 2022

Solución:

Para determinar cuál es el número cuya diferencia obtiene los números 12, 7 y 5, se debe buscar a partir de la cantidad de libros que dijo cada estudiante y ver en cuál número coinciden los tres:

	Sumando	Restando
Eduardo	2010 + 12 = 2022	2010 - 12 = 1998
	2010 + 7 = 2017	2010 - 7 = $\boxed{2003}$
	2010 + 5 = 2015	2010 - 5 = 2005
Laura	1998 + 12 = 2010	1998 - 12 = 1986
	1998 + 7 = 2005	1998 - 7 = 1991
	1998 + 5 = $\boxed{2003}$	1998 - 5 = 1993
Beatriz	2015 + 12 = 2027	2015 - 12 = $\boxed{2003}$
	2015 + 7 = 2022	2015 - 7 = 2008
	2015 + 5 = 2020	2015 - 5 = 2010

Se observa que coincide el número $\boxed{2003}$, por tanto ésta es la cantidad de libros que tiene la Biblioteca.

5. Se escriben siete números enteros consecutivos tal que la suma de los tres números más pequeños es 33, ¿cuál es la suma de los tres números más grandes?

A) 39 B) 37 C) 42 D) 48 E) 45

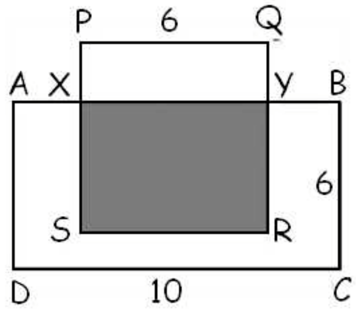
Solución:

La suma de los tres números más pequeños consecutivos:

$$x + (x+1) + (x+2) = 33 \quad \mapsto \quad 3x + 3 = 33 \quad \mapsto \quad 3x = 30 \qquad x = \frac{30}{3} = 10$$

con lo cual, los números son: $10\ ,\ 11\ ,\ 12\ ,\ 13\ ,\ \overbrace{14+15+16}^{14+15+16\,=\,45}$

6. En el dibujo a la derecha ABCD es un rectángulo y PQRS es un cuadrado. El área sombreada es la mitad del área del rectángulo ABCD. ¿Cuál es la longitud de PX?



A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 4

Solución:

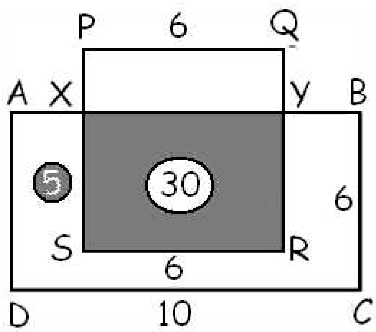
El área del rectángulo: $S_{ABCD} = \text{base} \ . \ \text{altura} = 10 \ . \ 6 = 60$ unidades cuadradas

El área sombreada: $S_{XYRS} = \dfrac{1}{2} \ . \ S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \ . \ 60 = 30$ unidades cuadradas

Como PQRS es un cuadrado $\Rightarrow$ lado $= 6$ unidades

$6 \ . \ \overline{XS} = 30 \quad \mapsto \quad \overline{XS} = 5$ unidades

$\overline{PS} = \overline{PX} + \overline{XS} \quad \mapsto \quad \overline{PX} = \overline{PS} - \overline{XS} \quad \mapsto \quad \overline{PX} = 6 - 5 = 1$ unidad



7. Hace dos años, la suma de las edades de los gatos Garfield y Silvestre era de 15 años. Ahora Garfield tiene 13 años. ¿En cuántos años Silvestre cumplirá 9 años?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

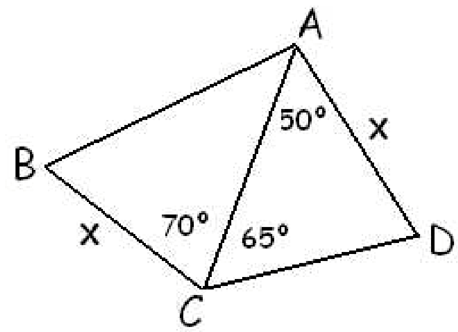
Solución:

- Hace dos años Garfield tenía $13-2=11$ años. Por tanto, Silvestre tenía:

$$11+x=15 \quad \mapsto \quad x=15-11=4 \text{ años}$$

- Han pasado 2 años, luego Silvestre tiene ahora: $4+2=6$ años

- Para que Silvestre tenga 9 años han de pasar: $9-6=\boxed{3 \text{ años}}$



8. En el cuadrilátero ABCD tenemos que $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\widehat{DAC}=50°$, $\widehat{DCA}=65°$, $\widehat{ACB}=70°$.
Hallar el valor de $\widehat{ABC}$

A) 50° B) 55° C) 60° D) 65° E) Imposible

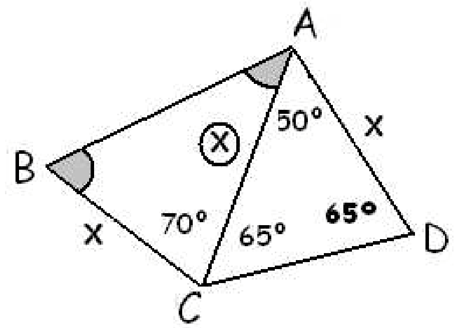
Solución:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Por tanto, en el triángulo $\overset{\Delta}{ACD}$ se tiene que el ángulo $\widehat{ADC}=180°-50°-65°=65°$

Siendo $\widehat{DCA}=\widehat{ADC}=65° \quad \leftrightarrow \quad \overline{CA}=\overline{DC}$

se tiene: $\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{CA}$

$$180° - 70° = 110° \quad \mapsto \quad \widehat{ABC}=\frac{110°}{2}=55°$$



9. En cada una de las 18 tarjetas hay exactamente un número escrito, 4 ó 5, La suma de todos los números de las tarjetas es divisible por 17. ¿En cuántas tarjetas está escrito el número 4?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Solución:

Para determinar en cuántas tarjetas aparece escrito el número 4 ó 5, y que a su vez la suma de todos sea divisible por 17, se hacen las siguientes opciones:

$(4 \times 1) + (5 \times 17) = 4 + 85 = 89 \longrightarrow$ 89 no es divisible por 17

$(4 \times 2) + (5 \times 16) = 8 + 80 = 88 \longrightarrow$ 88 no es divisible por 17

$(4 \times 3) + (5 \times 15) = 12 + 75 = 89 \longrightarrow$ 87 no es divisible por 17

$(4 \times 4) + (5 \times 14) = 16 + 70 = 86 \longrightarrow$ 86 no es divisible por 17

$(4 \times 5) + (5 \times 13) = 20 + 65 = 85 \longrightarrow$ 85 SI es divisible por 17

Ninguna de las combinaciones restantes es divisible por 17.

Hay $\boxed{5}$ tarjetas con el número 4 escrito y 13 tarjetas con el número 5 escrito.

10. Tres de los martes de un mes coincidieron con fechas pares. ¿Qué día de la semana era el día 21 de este mes?

A) martes B) miércoles C) viernes D) sábado E) domingo

Solución:

La distancia entre dos martes consecutivos como número de día par es de 14 días.

La única forma de tener tres martes pares en un mes es fijando el primer martes como día 2. Los siguientes martes pares serían el día 16 y el día 30.

Si el día 16 es martes, el día 21 es $\boxed{\text{domingo}}$

11. ¿Para cuántos enteros n $\left[1 \le n \le 100\right]$ el número n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 B) 50 C) 51 D) 54 E) 55

Solución:

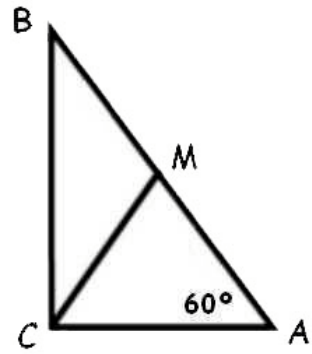
La condición se cumple para todos los números pares $\left[2^2,\ 4^2, 6^2, \cdots\right]$.

Entre $\left[1-100\right]$ hay 50 números pares.

A los 50 números hay que añadir los números: $\left\{1^1, 9^9, 25^{25}, 49^{49}, 81^{81}\right\}$

En efecto: $$\begin{cases} 9^9 = \left(3^2\right)^9 = 3^{18} = \left(3^9\right)^2 \\ 25^{25} = \left(5^2\right)^{25} = 5^{50} = \left(5^{25}\right)^2 \\ 49^{49} = \left(7^2\right)^{49} = 7^{98} = \left(7^{49}\right)^2 \\ 81^{81} = \left(3^4\right)^{49} = 3^{196} = \left(3^{98}\right)^2 \end{cases}$$

Por tanto, hay $\boxed{55}$ números que satisfacen la condición.

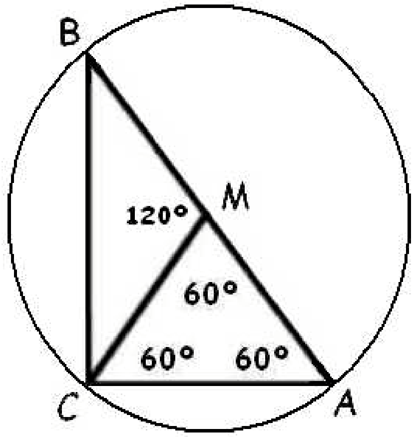


12. El triángulo ABC es rectángulo, M es el punto medio de su hipotenusa $\overline{AB}$, y $\hat{A} = 60°$. Entonces $\widehat{BMC} =$

A) 105° B) 108° C) 110° D) 120° E) 125°

Solución:

$\overline{MC}$ es la mediana del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, dado que M es el circuncentro del triángulo (centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, por lo que la distancia a cada uno de sus vértices es la misma, el radio de dicha circunferencia), se tiene $\overline{MC} = \overline{MA}$



$$\overline{MC} = \overline{MA} \quad \mapsto \quad \widehat{MCA} = 60^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{ÁNGULO EXTERIOR}} \quad \widehat{BMC} = \boxed{120^\circ}$$

13. En cada uno de sus cumpleaños, Rosa recibe tantas flores como el número de años que cumple. Ella guarda las flores y ahora tiene 120 flores. ¿Cuántos años tiene Rosa?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 20

Solución:

El número de flores es la suma de los enteros consecutivos de 0 a n, encontrándose en progresión aritmética de diferencia $d = 1$.

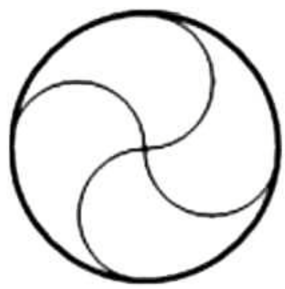
La suma de n término de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \quad \mapsto \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n).n}{2} = 120 \quad \mapsto \quad (1+n).n = 240$$

Por tanto, $n^2 + n - 240 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} n = 15 \\ n = -16 \end{cases}$

Rosa tiene $\boxed{15 \text{ años}}$

14. Un círculo de radio 4 cm se divide en cuatro partes congruentes usando arcos de radio 2 cm, según se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro de una de las partes resultantes?



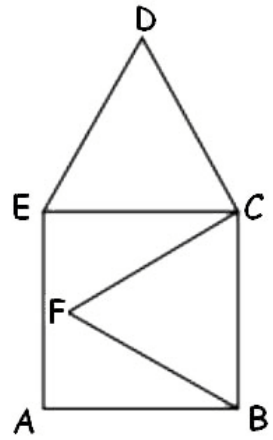
A) 2π B) 4π C) 6π D) 8π E) 12π

Solución:

La longitud de la circunferencia es $L = 2\,.\,\pi\,.\,4 = 8\pi$, entonces cada uno de los arcos tiene de longitud $\dfrac{8\pi}{4} = 2\pi$

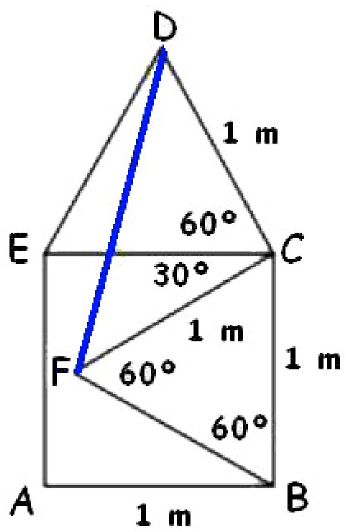
Dado que una parte resultante está compuesta de 3 arcos, el perímetro es: $3\,.\,2\pi = \boxed{6\pi}$

15. Si ABCE es un cuadrado, BCF y CDE son triángulos equiláteros. Si AB mide 1 m, ¿cuál es la medida de FD?



A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{5}-1$ D) $\sqrt{6}-1$ E) $\sqrt{3}$

Solución:



El triángulo BCF es equilátero $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CF} = 1\,\text{m} \\ B\hat{C}F = 60° \end{cases}$

El triángulo CDE es equilátero $\begin{cases} \overline{EC} = \overline{ED} = \overline{DC} = 1\,\text{m} \\ E\hat{C}D = 60° \end{cases}$

$\overline{FD}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{FCD}$, aplicando el teorema de Pitágoras: $\overline{FD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$