CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS NIVEL IV (BACHILLERATO)

1. Si $ax^2+bx+c=0$ tiene dos raíces distintas, entonces $ax^6+bx^3+c=0$ tiene:

A) dos raíces iguales B) dos raíces opuestas C) dos raíces distintas
D) cuatro raíces distintas E) tres pares de raíces opuestas

Solución:

$ax^6+bx^3+c=0 \quad \mapsto \quad a\left[x^3\right]^2+b\left[x^3\right]^2 c=0 \quad \xrightarrow{x=t^3} \quad at^2+bt+c=0$ se obtienen las dos raíces distintas que tiene la ecuación $ax^2+bx+c=0$

Al hacer la raíz cúbica de cada una de las dos raíces distintas se obtienen dos raíces reales distintas para x. La solución correcta es (C)

2. $\sqrt{\left[\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]\left[\sqrt{5}+\sqrt{17}-\sqrt{10}\right]\left[\sqrt{5}-\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]\left[-\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]}=$

A) 5 B) 10 C) 11 D) 14 E) 17

Solución:

- $\left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)+\sqrt{10}\right]\left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)-\sqrt{10}\right]=\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2=2\sqrt{85}+12$

- $\left[\sqrt{5}-\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]\left[-\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]=\left[\sqrt{10}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)\right]\left[\sqrt{10}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)\right]=$

  $=\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)^2=2\sqrt{85}-12$

Con lo cual,

$$\sqrt{\left[\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]\left[\sqrt{5}+\sqrt{17}-\sqrt{10}\right]\left[\sqrt{5}-\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]\left[-\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right]}=$$

$$=\sqrt{\left[2\sqrt{85}+12\right]\left[2\sqrt{85}-12\right]}=\sqrt{(340-144)}=\sqrt{196}=14$$

3. ¿Cuántos números *abc,* con $c \neq 0$, hay de tres cifras tales que $abc - cba = de7$?

A) 60 B) 50 C) 45 D) 42 E) 30

Solución

$$\begin{cases} abc = 100\,a + 10\,b + c \\ cba = 100\,c + 10\,b + a \end{cases} \longrightarrow \quad abc - cba = \left[100\,a + 10\,b + c\right] - \left[100\,c + 10\,b + a\right] = 99(a-c)$$

Para que $99(a-c)$ termine en 7 $\Rightarrow \quad a - c = 3$

La diferencia de $a - c = 3$, con $c \neq 0$, se obtiene con 6 parejas (a, c):

$(9,6)\quad(8,5)\quad(7,4)\quad(6,5)\quad(5,2)\quad(4,1)$ para cualquier dígito b

Con lo cual, la cantidad de números *abc,* que verifican la condición es: $6\,.\,10 = 60$

La respuesta correcta es *A*

4. El valor máximo de $16\,x\,y$ cuando $x + 4y = 5$ es:

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 25

Solución

$$y = \frac{5-x}{4}$$

Solicitan el máximo de $f(x) = 16\,x\left[\dfrac{5-x}{4}\right] = 4\,x\left[5-x\right] = 20\,x - 4\,x^2$

$$f(x) = 20\,x - 4\,x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 20 - 8\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{8} = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} \quad \mapsto \quad y = \frac{5 - \frac{10}{4}}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

El valor pedido es: $16\,x\,y = 16 \,.\, \frac{10}{4} \,.\, \frac{5}{8} = 25$

La respuesta correcta es E

5. El determinante $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 3 & x & 5 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix}$ es igual a:

A) $x^3 + 3x^2 + 5x + 10$ B) $x(x-3)(x-5)$ C) 0

D) $x^2 - 8x + 10$ E) $(x+8)(x-3)(x-5)$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 3 & x & 5 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+8 & 3 & 5 \\ x+8 & x & 5 \\ x+8 & 5 & x \end{vmatrix} = (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 2 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 2 & x-5 \end{vmatrix} = (x+8)\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 2 & x-5 \end{vmatrix} = (x+8)\,(x-3)\,(x-5)$$

La respuesta correcta es E

6. El punto de inflexión de la cúbica $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ tiene ordenada y igual a:

A) 0 B) 4 C) -1 D) 2 E) 1

Solución

Toda la cúbica tiene un punto de inflexión, la abscisa del punto de inflexión anula la segunda derivada.

$$y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \mapsto \quad y' = 3x^2 + 6x + 2 \quad \mapsto \quad y'' = 6x + 6 \quad \xrightarrow{y''=0} \quad x = -1$$

La ordenada en $x = -1$:

$$y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \xrightarrow{x=-1} \quad y = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = -1 + 3 - 2 + 1 = 1$$

La respuesta correcta es E

7. Si $\log 2 = 0{,}301030$ y $\log 3 = 0{,}477121$ (los logaritmos son decimales), el valor de x para que $3^{x+3} = 135$ es aproximadamente:

A) 5 B) 1,47 C) 1,67 D) 1,78 E) 1,63

Solución

$$3^{x+3} = 135 \quad \rightarrow \quad \log 3^{x+3} = \log 135 \quad \rightarrow \quad \left[x+3\right] \log 3 = \log 135$$

$$\left[x+3\right] = \frac{\log 135}{\log 3} = \frac{\log (3^3 \,.\, 5)}{\log 3} = \frac{\log 3^3 + \log 5}{\log 3} = \frac{3 \log 3 + \log 5}{\log 3} = \frac{3 \log 3 + \log\left[\frac{10}{2}\right]}{\log 3} =$$

$$= \frac{3 \log 3 + \log 10 - \log 2}{\log 3} = 3 + \frac{\log 10 - \log 2}{\log 3} = 3 + \frac{1 - 0{,}301030}{0{,}477121} = 4{,}46$$

$$x + 3 = 4{,}465 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}465$$

La respuesta es B

8. Sean *d* y *e* las soluciones de la ecuación $2x^2 + 3x + 5 = 0$
¿Cuánto vale $(d-1)(e-1)$?

A) $\frac{5}{2}$ B) 0 C) 3 D) 5 E) 6

Solución

Como d y e son soluciones de $2x^2+3x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} d+e=-\dfrac{3}{2} \\ de=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Por otra parte, $(d-1)(e-1)=de-d-e+1=de-\left[d+e\right]+1$

con lo que,

$$(d-1)(e-1)=de-\left[d+e\right]+1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1=5$$

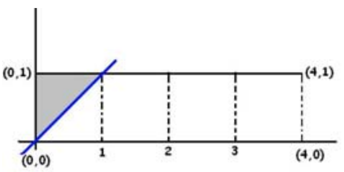
La respuesta es D

9. Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 1) y (0,1). ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

Solución

El punto (x, y) que verifica que $x<y$ se encuentra en la zona rayada. El área de esta zona es $\frac{1}{2}$



Como el área del rectángulo es 4. La probabilidad pedida será: $p=\dfrac{\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{1}{8}$

La respuesta es A

10. ¿Cuál es la probabilidad de que un divisor positivo de 60, elegido al azar, sea menor que 7?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Solución

Los divisores positivos de 60 son doce: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Entre ellos, hay 6 menores que 7, por lo que la probabilidad pedida será $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

La respuesta E

11. La suma de los cuadrados de todos los números reales que satisfacen la ecuación $x^{256} - 256^{32} = 0$ es:

A) 8 B) 128 C) 512 D) 65536 E) $2 \, . \, 256^{32}$

Solución

$$x^{256} - 256^{32} = 0 \quad \mapsto \quad x^{256} = 256^{32} = \left(2^8\right)^{32} = 2^{256} \quad \mapsto \quad x = \pm \sqrt[256]{2^{256}} = \pm 2$$

Como las raíces son $x = 2$ y $x = -2$, las suma de sus cuadrados será 8.

La respuesta A

12. El menor entero k para el que la ecuación $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ no tiene raíces reales es:

A) -1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución

$$2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x^2 k - 8x - x^2 + 6 = (2k - 1)\, x^2 - 8x + 6 = 0$$

La ecuación de segundo grado $(2k - 1)\, x^2 - 8x + 6 = 0$ no tendrá raíces reales cuando el discriminante:

$$\Delta = 64 - 24(2k - 1) < 0 \quad \mapsto \quad 24(2k - 1) > 64 \quad \mapsto \quad 2k - 1 > \frac{64}{24} \quad \mapsto \quad 2k > \frac{64}{24} + 1$$

$$2k > \frac{8}{3} + 1 \quad \mapsto \quad 2k > \frac{11}{3} \quad \mapsto \quad k > \frac{11}{6}$$

El menor entero para el que no tiene raíces reales es el 2

La respuesta es B

13. Un año es Año Santo Compostelano si el 25 de julio cae en domingo. ¿Cuántos años podrán pasar, como mínimo, entre dos Años Santos Compostelanos consecutivos?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 11 E) 12

Solución

Cada fecha se desplaza un día a la semana si el año siguiente no es bisiesto y dos días cuando es bisiesto.

Con lo cual, el caso favorable para que dos años Compostelanos se encuentren lo más próximo posible será: Si este año (N) ha sido Año Santo, el próximo año $(N+1)$ sea bisiesto.

De este modo, el 25 de julio caerá así.

$$\left[N \equiv \text{Domingo}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{bisiesto} \\ N+1 \equiv \text{Martes} \\ \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \left[N+2 \equiv \text{Miércoles}\right]$$

$$\xrightarrow{2} \left[N+3 \equiv \text{Jueves}\right] \xrightarrow{3} \left[N+4 \equiv \text{Viernes}\right] \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} \text{bisiesto} \\ N+5 \equiv \text{Domingo} \\ \end{bmatrix}$$

Han transcurrido 5 años. La respuesta es A

14. Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x-1)$ es 2 y entre $(x+1)$ es 4, el resto de la división de $P(x)$ entre (x^2-1) es:

A) 6 B) $2x+4$ C) $2x-4$ D) $-x+3$ E) x^2+2x-4

Solución

El resto será un polinomio constante o de grado 1, es decir, $R(x)=a+bx$

$$P(x) = (x^2 - 1)\,Q(x) + (a + bx) \;\Rightarrow\; \begin{cases} P(1) = a + b \xrightarrow{Resto=2} \\ P(-1) = a - b \xrightarrow{Resto=4} \end{cases} \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 4 \end{cases} \;\mapsto\; \begin{matrix} a = 3 \\ b = -1 \end{matrix}$$

El resto solicitado será $R(x) = 3 - x$

La respuesta es D

15. Si x e y son números diferentes tales que $2003 + x = y^2$ e $2003 + y = x^2$, el valor del producto xy es:

A) - 2001 B) - 2002 C) - 1001 D) - 1 E) 2000

Solución

- $\begin{cases} 2003 + x = y^2 \\ 2003 + y = x^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Restando las ecuaciones}} x - y = y^2 - x^2 \;\Rightarrow\; x - y = (y - x)\,(y + x)$

Como x e y son diferentes, se puede dividir por $(x - y)$ con lo que: $y + x = -1$

- $\begin{cases} 2003 + x = y^2 \\ 2003 + y = x^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando las ecuaciones}} 4006 + x + y = y^2 + x^2 \xrightarrow{x+y=-1} 4005 = y^2 + x^2$

Considerando que $\underbrace{(x + y)^2}_{(-1)^2} = \underbrace{x^2 + y^2}_{4005} + 2xy \longrightarrow 1 = 4005 + 2xy \;\Rightarrow\; xy = -2002$

La respuesta es B