2. CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS NIVEL IV (BACHILLERATO)

1. Con las letras de la palabra NADIE podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras,. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra NADIE en esa relación?

A) 97 B) 98 C) 90 D) 100 E) 101

Solución:

Delante de la palabra NADIE están todas las palabras que empiezan por A, D, E, I, que son un total de $4 \times 24 = 96$ palabras delante. De las palabras que comienzan por N, que se encuentren delante, solamente estaría la palabra NADEI.

En definitiva habrá 97 palabras delante de NADIE, ocupando ella el lugar 98. La respuesta correcta sería B).

2. ¿Para cuántos enteros positivos n, se tiene que $\frac{n}{20-n}$ es el cuadrado de un número entero?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

Solución:

Con lo cual,

El número $n < 20$, en caso contrario $\frac{n}{20-n} < 0$ y no podría ser un cuadrado.

Por otra parte, $20 - n \geq 1 \quad \mapsto \quad \frac{n}{20-n} < 20 \quad \rightarrow$ Teniendo que observar los cuadrados perfectos menores que 20, y entre ellos a cuántos corresponde un valor entero n

En un principio, $\frac{n}{20-n} = \{1, 4, 9, 16\}$

- Si $\frac{n}{20-n}=1 \quad \mapsto \quad n=20-n \quad \mapsto \quad n=10$
- Si $\frac{n}{20-n}=4 \quad \mapsto \quad n=80-4n \quad \mapsto \quad n=16$
- Si $\frac{n}{20-n}=9 \quad \mapsto \quad n=180-9n \quad \mapsto \quad n=18$
- Si $\frac{n}{20-n}=16 \quad \mapsto \quad n=320-16n \quad \mapsto \quad n=\frac{320}{17}$ no es entero

Así n puede ser 10, 16 y 18, con lo que, la respuesta correcta sería la C).

3. Si x, y, z son números positivos que verifican $x+\frac{1}{y}=4$, $y+\frac{1}{z}=1$, $z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$, entonces el producto de los tres números xyz es igual a:

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

Solución:

No tiene mucho sentido intentar hallar x, y, z resolviendo el sistema dado. Multiplicando las tres igualdades, se tiene:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)=\frac{28}{3} \quad \mapsto \quad xyz+\underbrace{x+\frac{1}{y}}_{4}+\underbrace{y+\frac{1}{z}}_{1}+\underbrace{z+\frac{1}{x}}_{7/3}+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}$$

$$xyz+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}-1-4-\frac{7}{3} \quad \mapsto \quad xyz+\frac{1}{xyz}=2 \quad \mapsto \quad xyz=1$$

La respuesta correcta es B).

4. El valor de x en la ecuación $\log_4 \sqrt{x^{4/3}} + 3\log_x(16x) = 7$ es:

A) 16 B) 27 C) 64 D) 81 E) 343

Solución:

$$\log_4 \sqrt{x^{4/3}} + 3\log_x(16x) = 7 \quad \mapsto \quad \log_4 x^{4/6} + 3\left[\log_x 16 + \log_x x\right] = 7$$

$$\frac{4}{6}\log_4 x + 3\log_x 16 + 3\log_x x = 7 \quad \mapsto \quad \frac{2}{3}\log_4 x + 3\log_x 16 = 4 \quad \mapsto \quad \frac{2}{3}\log_4 x + 3\log_x 4^2 = 4$$

$$\frac{2}{3}\log_4 x + 6\log_x 4 = 4$$

Si $\log_4 x = b \;\Rightarrow\; 4^b = x \;\mapsto\; 4 = x^{1/b} \;\longrightarrow\; \log_x 4 = \log_x x^{1/b} = \frac{1}{b}\log_x x = \frac{1}{b}$

con lo que,

$$\frac{2}{3}\log_4 x + 6\log_x 4 = 4 \quad \mapsto \quad \frac{2}{3}b + 6\,\frac{1}{b} = 4 \quad \mapsto \quad \frac{2b^2+18}{3b} = 4 \quad \mapsto \quad 2b^2 - 12b + 18 = 0$$

$$b^2 - 6b + 9 = 0 \quad \mapsto \quad b = 3$$

entonces, $\log_4 x = 3 \;\Rightarrow\; x = 4^3 = 64$

La respuesta es C).

5. La parte real del complejo $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + (1+i)^5$ es

A) 0 B) 1 C) $4\sqrt{2}$ D) -8 E) $-2\sqrt{2}$

Solución:

Es más práctico trabajar como un binomio:

$(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$ $\qquad (1+i)^3 = 2i\,(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2$

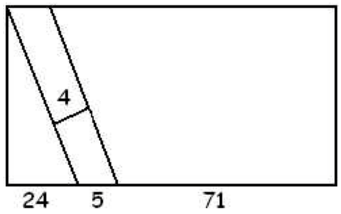
$(1+i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$ $\qquad (1+i)^5 = (1+i)\,(1+i)^4 = (1+i)\,(-4) = -4 - 4i = -4 - 4i$

Por tanto,

$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + (1+i)^5 = 1 + (1+i) + (2i) + (2i-2) + (-4) + (-4-4i) = -8+i$$

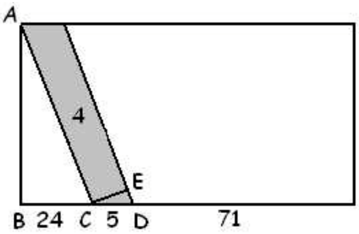
La parte real del número complejo es $\boxed{-8}$, siendo la respuesta correcta D).

6. La carretera de 4m de ancha atraviesa como indica la figura una plantación de girasoles de forma rectangular. ¿Cuántos m^2 de plantación han perdido como consecuencia de la existencia de la carretera?



A) 120 B) 150 C) 160 D) 200 E) 250

Solución:



Se desea saber el área del paralelogramo rayado. La altura es de 4 m, desconociendo la base $\overline{AC}$

Los triángulos $\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{CDE}$ son semejantes.

$$\overline{ED} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \quad \mapsto \quad \frac{\overline{AC}}{5} = \frac{24}{3} \quad \mapsto \quad \overline{AC} = 40$$

El área del paralelogramo será: $40 \times 4 = \boxed{160\ m^2}$

La respuesta correcta es C).

7. Si log representa el logaritmo decimal (base 10), el valor de

$\log(2!) - \log(3!) + \log(4!) - \cdots - \log(9!) + \log(10!)$ es:

A) 1 B) $\log(2) - \log(3) + \log(4) - \cdots - \log(9) + \log(10)$ C) $\log(5!)$

D) $5\log 2 + \log(5!)$ E) $2\log 5 + 5\log 2$

Solución:

Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, la expresión queda:

$$\log(2!) - \log(3!) + \log(4!) - \ \cdots \ - \log(9!) + \log(10!) = \log\frac{2!\ 4!\ 6!\ 8!\ 10!}{3!\ 5!\ 7!\ 9!}$$

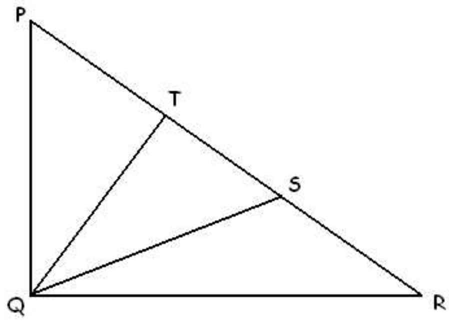
Ahora bien,

$$\log\frac{2!\ 4!\ 6!\ 8!\ 10!}{3!\ 5!\ 7!\ 9!} = \log\frac{2!\ (4\ .\ \cancel{3!})\ (6\ .\ \cancel{5!})\ (8\ .\ \cancel{7!})\ (10\ .\ \cancel{9!})}{\cancel{3!}\ \ \cancel{5!}\ \ \cancel{7!}\ \ \cancel{9!}} = \log(2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10)$$

$$\log(2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10) = \log(2\ .\ \boxed{4}\ .\ \boxed{2\times 3}\ .\ 2^3\ .\ 2\times\boxed{5}) = \log(2^5\ .\ 2\times 3\times 4\times 5) =$$

$$= \log(2^5) + \log(2\times 3\times 4\times 5) = 5\log 2 + \log(5!)$$

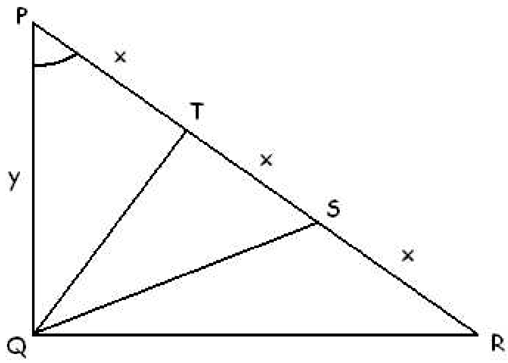
La respuesta es D).



8. En el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{PQR}$, la hipotenusa $\overline{PR}$ está dividida en tres trozos iguales por los puntos S y T. Si $QS^2 + QT^2 = k\ .\ PR^2$. El valor de k es:

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\frac{1}{4}$

Solución:



Designando por $\overline{PT} = x$ e $\overline{PQ} = y$, aplicando el teorema del coseno a los triángulos $\overset{\triangle}{PQT}$ y $\overset{\triangle}{PQS}$, como $\cos\hat{P} = \frac{y}{3x}$

$$QT^2 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{y}{3x} = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y^2$$

$$QS^2 = (2x)^2 + y^2 - 2(2x)y\frac{y}{3x} = 4x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y^2$$

$$QT^2 + QS^2 = \left[x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y^2\right] + \left[x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y^2\right] = 5x^2$$

De otra parte, $PR^2 = (3x)^2 = 9x^2$

Con lo cual, $QS^2 + QT^2 = k\,.\,PR^2 \quad \mapsto \quad 5x^2 = k\,9x^2 \quad \mapsto \quad \boxed{k = \frac{5}{9}}$

La respuesta correcta es A).

9. Si escribo 2003 en la forma $1-2+3-4+5-6+\ \cdots\ +(n-2)-(n-1)+n$, la suma de los dígitos (o cifras) de n es:

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Solución:

Para que los signos sean alternados de la forma que se expresan 'n' debe de ser impar.

Si se agrupan los $(n-1)$ números anteriores por parejas, resulta:

$$\left[1-2\right]+\left[3-4\right]+\left[5-6\right]+\overbrace{\cdots}^{(n-1)/2}+\left[(n-2)-(n-1)\right]=\left[-1\right]+\left[-1\right]+\left[-1\right]+\overbrace{\cdots}^{(n-1)/2}+\left[-1\right]$$

Como hay $\frac{n-1}{2}$ parejas, donde cada suma vale (-1), la suma de la serie dada será:

$$1-2+3-4+5-6+\ \cdots\ +(n-2)-(n-1)+n = -\frac{n-1}{2}+n = 2003 \quad \mapsto \quad n = 4005$$

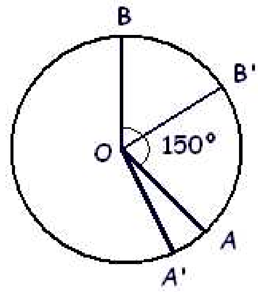
La suma de sus cifras es $\boxed{9}$, siendo la respuesta correcta C).

10. Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{5}{22}$ D) $\frac{4}{23}$ E) $\frac{7}{30}$

Solución:

A las cinco de la mañana las agujas del reloj forman un ángulo de 150º.



La aguja de las horas recorre 30º en 1 hora (60 minutos) y la aguja de los minutos recorre 360º en 1 hora (60 minutos)

Cuando transcurren t minutos, las agujas recorrerán $\begin{cases} \text{horas}: & t^\circ/2 \\ \text{minutos}: & 6^\circ t \end{cases}$

El triángulo

$$A'\overset{\triangle}{O}B' = 90^\circ \quad \mapsto \quad \frac{t}{2} + 150 - 6t = 90 \quad \mapsto \quad t = \frac{120}{11} \text{ minutos} \quad \mapsto \quad \boxed{t = \frac{2}{11} \text{ horas}}$$

La respuesta es B).

11. $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ es igual a:

A) 27^{20} B) 3^{66} C) 9^{60} D) 3^{41} E) 3^{120}

Solución:

$$9^{20} + 9^{20} + 9^{20} = 3\,.\,9^{20} = 3\,.\,3^{40} = 3^{41}$$

La respuesta es D).

12. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt[3]{2x+14}-\sqrt[3]{2x-14}=\sqrt[3]{4}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Solución:

La función $y=\sqrt[3]{2x-14}$ se encuentra siempre por debajo de la función $y=\sqrt[3]{2x+14}$, aunque para valores de 'x' alejados del origen tienden a ser iguales.

- Para valores cercanos al origen, la función $y=\sqrt[3]{2x-14}+\sqrt[3]{4}$ se encuentra por debajo de la función $y=\sqrt[3]{2x+14}$.
- Para valores alejados del origen, la función $y=\sqrt[3]{2x-14}+\sqrt[3]{4}$ estará por encima de la función $y=\sqrt[3]{2x+14}$

Concluyendo que, el número de puntos de corte de las gráficas $y=\sqrt[3]{2x-14}+\sqrt[3]{4}$ e $y=\sqrt[3]{2x+14}$ son dos.

La respuesta correcta es la B).

13. Sea n un número entero positivo impar. El mayor entero positivo k tal que $n^{12}-n^8-n^4+1$ es divisible por 2^k sea cual fuere el impar n es:

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

Solución:

$$n^{12}-n^8-n^4+1=n^8(n^4-1)-(n^4-1)=(n^4-1)\left[n^8-1\right]=(n^4-1)(n^4-1)(n^4+1)=$$

$$=(n^4-1)^2(n^4+1)=(n^2+1)^2(n^2-1)^2(n^4+1)=\boxed{(n+1)^2\ (n-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)}$$

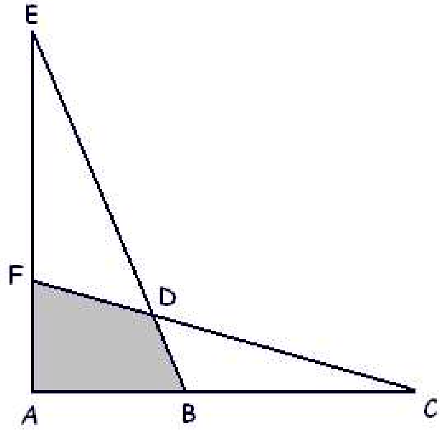
Como n es impar:

- $(n-1)$ y $(n+1)$ son pares consecutivos, con lo que uno de ellos es múltiplo de 4.
- en n^2+1 hay 1 factor 2
- en n^4+1 hay 1 factor 2

Recopilando todos los factores 2: $2\times2\ +\ 1\times2\ +\ 1\times2\ +\ 1=\boxed{9}$

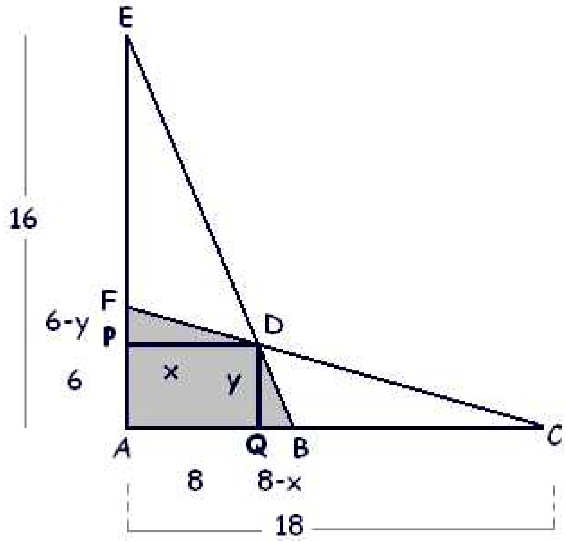
El número es divisible por 2^9, la respuesta correcta es C).

14. En la figura adjunta, donde $\overline{EA}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, sabemos la medida de los siguientes segmentos: $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=18$, $\overline{AE}=16$, $\overline{AF}=6$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABDF sombreado?



A) 38 B) 24 C) 42 D) 20 E) 34

Solución:



Trazando las perpendiculares $\overline{DP}=y$, $\overline{DQ}=x$

Por semejanza de los triángulos formados:

$$\frac{y}{8-x}=\frac{16}{8} \quad \mapsto \quad 2x+y=16$$

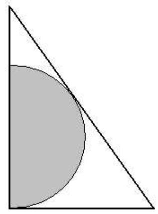
$$\frac{6-y}{x}=\frac{6}{18} \quad \mapsto \quad x+3y=18$$

$$\begin{cases} 2x+y=16 \\ x+3y=18 \end{cases} \quad \mapsto \quad x=6 \qquad y=4$$

El área solicitada será: $A=\left[\dfrac{(6-4)\times 6}{2}\right]+\left[6\times 4\right]+\left[\dfrac{(8-6)\times 4}{2}\right]=34$

La respuesta correcta es E).

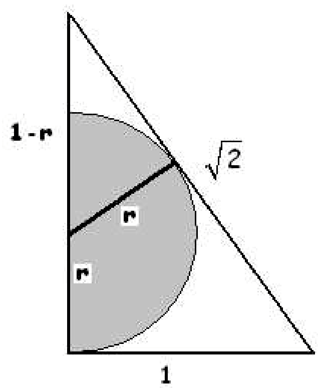
15. Los catetos del triángulo rectángulo miden 1. ¿Cuál es el radio del semicírculo sombreado?.



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $3-2\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2-\sqrt{2}$

Solución:

Uno de los vértices del triángulo rectángulo es el centro del semicírculo y el triángulo formado es semejante al triángulo original.



$$\frac{r}{1-r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mapsto \quad r(\sqrt{2}+1)=1 \quad \mapsto \quad r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\boxed{\sqrt{2}-1}$$

La respuesta correcta es A).