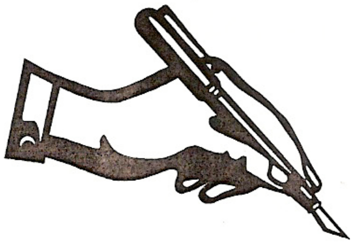
Estadística Teórica II



VARIABLES ALEATORIAS

SUCESOS Y PROBABILIDAD

1.- Sean A y B dos sucesos correspondientes a un experimento aleatorio, tales que $A \cup B = \Omega$ con $P(A) = 0{,}8$ y $P(B) = 0{,}5$. Se pide calcular las probabilidades:

$P(A \cap B)$

$P(A \cup \overline{B})$

$P(\overline{A} \cup B)$

$P(\overline{A} \cup \overline{B})$

Solución.-

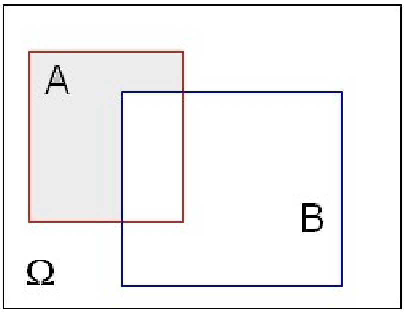
Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, con la hipótesis $A \cup B = \Omega$, siendo $P(\Omega) = 1$, se tiene:

$1 = 0{,}8 + 0{,}5 - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0{,}3$

$\overline{B}$ es el complementario de B, en consecuencia, $\overline{B} = \Omega - B$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{B}) = P(\Omega) - P(B) \;\mapsto\; P(\overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$



de otra parte,

$\overline{B} = \Omega - B = (A \cup B) - B = A \cap \overline{B} \;\mapsto\; P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5$

con lo que, $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}8$

también podríamos haber considerado: $A \cup B = \Omega \quad \Rightarrow \quad B \subset A$

con lo cual, $P(A \cup \overline{B}) = P(A) = 0{,}8$

$P(\overline{A} \cup B) = P(B) = 0{,}5$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) \overbrace{=}^{\text{Leyes de Morgan}} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

2.- Sean A, B y C tres sucesos incompatibles, con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$ y $P(C) = 0{,}166$. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

$P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

$P(B - A)$

Probabilidad de que exactamente se realice uno de los tres sucesos considerados.

<u>Solución.-</u>

El suceso $\overline{A} \cap \overline{B} = (\overline{A \cup B})$. Por las leyes de Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Como los sucesos son incompatibles, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$. En consecuencia,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\mapsto\; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

resultando:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

El suceso $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (\overline{A \cup B \cup C})$. Por las leyes de Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Como los sucesos son incompatibles, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

con lo cual,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 1 - 0{,}5 - 0{,}25 - 0{,}166 = 0{,}084$$

Siendo A, B y C sucesos incompatibles, queda:

$$A \cap B = \phi \qquad A \cap C = \phi \qquad B \cap C = \phi \qquad A \cap B \cap C = \phi$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } A \cap C = \phi \Rightarrow C \subset \overline{A} \\ \text{Si } B \cap C = \phi \Rightarrow C \subset \overline{B} \end{array}\right. \text{ y, por tanto, } \quad \overline{A} \cap C = C \quad \text{y} \quad \overline{B} \cap C = C \quad \text{y} \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = C$$

quedando, $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(C) = 0{,}166$

d) Sabemos que el suceso $B - A = B \cap \overline{A}$. Por otro lado, $A \cap B = \phi$, con lo cual $B \subset \overline{A}$ resultando, $B - A = B \cap \overline{A} = B$

y la probabilidad pedida: $P(B - A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) = 0{,}25$

Sea E = 'suceso ocurre exactamente uno de los tres sucesos A, B , C'

$$E = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

por analogía con razonamientos anteriores, se tiene que:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \qquad \overline{A} \cap B \cap \overline{C} = B \qquad \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = C$$

$$P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}166 = 0{,}916$$

3.- Sean A y B dos sucesos independientes de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$, tales que $P(A) = \alpha$ y $P(B) = \beta$. Se pide:
Probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.
Probabilidad de que ninguno de los sucesos se verifique. En este último caso, suponiendo que $\alpha + \beta = 1/2$, dar una cota para esta probabilidad.

<u>Solución.-</u>

Sea el suceso E = 'ocurre uno y solo uno de los sucesos'

$$E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

♦ por ser incompatibles $(A \cap \overline{B})$ y $(\overline{A} \cap B)$:

$$P(E) = P\big[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

♦ como son independientes A y B $\Rightarrow \begin{array}{l} A \text{ y } \overline{B} \quad \text{son independientes} \\ \overline{A} \text{ y } B \quad \text{son independientes} \end{array}$

$$P(E) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B) = \alpha.(1-\beta) + (1-\alpha).\beta$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = (1-\alpha).(1-\beta) = 1 - (\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

cuando $\alpha + \beta = 1/2$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{2} + \alpha\beta = \frac{1}{2} + \alpha\beta = \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \geq \frac{1}{2}$$

para dar una cota de la probabilidad:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \mapsto f'(\alpha) = \frac{1}{2} - 2\alpha = 0 \mapsto \alpha = \frac{1}{4}$$

con lo que $f(1/4) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 0{,}5625$

La cota pedida: $0{,}5 \leq P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq 0{,}5625$

4.- Sean A, B dos sucesos con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$
Calcular la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los dos sucesos.

Solución.-

Sea el suceso E = 'ocurre uno y solo uno de los sucesos'

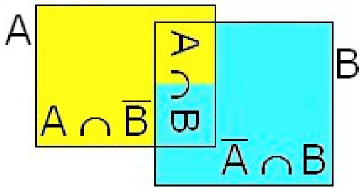
$$E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

♦ por ser incompatibles $(A \cap \overline{B})$ y $(\overline{A} \cap B)$:

$$P(E) = P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

♦ por otra parte, $A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

y como $A \cap B \subset A$



se tiene que, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Análogamente, $\overline{A} \cap B = B - (A \cap B)$ y como $A \cap B \subset B$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

con lo cual,

$$P(E) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - 2 . P(A \cap B) = 0{,}5 + 0.3 - 2 . 0{,}1 = 0{,}6$$

5.- Se consideran familias con dos hijos, suponiendo que las cuatro posibles combinaciones por sexo: VV, VH, HV, HH, donde V significa niño y H niña, son igualmente probables. Se piden las siguientes probabilidades:
Que una familia que va a ser encuestada tengo como máximo una niña.
Que una familia que va a ser encuestada tenga un niño y una niña.
¿Son los anteriores sucesos independientes?
Estudiar los apartados a), b) y c), en el caso de que las familias consideradas tengan tres hijos y las ocho posibles composiciones por sexo sean equiprobables.

Solución.-

Sean los sucesos: $A = VV \quad B = VH \quad C = HV \quad D = HH$

se tiene: $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \dfrac{1}{4}$

Sea el suceso E = 'una niña como máximo': $E = A \cup B \cup C$

como son sucesos incompatibles: $P(E) = P(A) + P(B) + P(C) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Sea el suceso F = 'un niño y una niña': $F = B \cup C$

$$P(F) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

El suceso $E \cap F = [A \cup B \cup C] \cap [B \cup C] = B \cup C$

$$P(E \cap F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(E).P(F) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$P(E \cap F) \neq P(E).P(F) \mapsto$ Los sucesos no son independientes.

En el caso de familias de tres hijos, las posibles combinaciones son: VVV, VVH, VHV, HVV, HHV,HVH, VHH, HHH, cada una de las cuales tiene probabilidad $1/8$ por ser equiprobables.

Sean los sucesos: $\begin{array}{llll} A = VVV & B = VVH & C = VHV & D = HVV \\ E = HHH & F = HHV & G = HVH & K = VHH \end{array}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = P(F) = P(G) = P(K) = \frac{1}{8}$$

- Sea el suceso E = 'una niña como máximo': $E = A \cup B \cup C \cup D$

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

- Sea el suceso F = 'un niño y una niña': $F = B \cup C \cup D \cup F \cup G \cup K$

$$P(F) = P(B) + P(C) + P(D) + P(F) + P(G) + P(K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

- $E \cap F = \left[A \cup B \cup C \cup D\right] \cap \left[B \cup C \cup D \cup F \cup G \cup K\right] = B \cup C \cup D$

$$P(E \cap F) = P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(E)\,.\,P(F) = \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$P(E \cap F) \; = \; P(E)\,.\,P(F) \;\mapsto$ Los sucesos son independientes.

6.- Un banco ha estimado, por experiencias anteriores, que la probabilidad de que una persona falle en los pagos de un préstamo personal es de 0,3. También ha estimado que el 40% de los préstamos no pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones y el 60% de los préstamos pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones.
Se pide:
Probabilidad de que un préstamo que se haga para financiar un viaje de vacaciones no se pague a tiempo.
Probabilidad de que si el préstamo se hace para propósitos distintos a viajes de vacaciones sea pagado a tiempo.

<u>Solución.-</u>

Sean los sucesos:

A = 'una persona falla en los pagos de su préstamo personal'
B = 'una persona recibe un préstamo para financiar viajes de vacaciones'

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(B/A) = 0{,}4 \qquad P(B/\overline{A}) = 0{,}6$$

de donde:

$$P(\overline{A}) = 0{,}7$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - P(B/\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

$$P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Por el teorema de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A) + P(\overline{A}).P(B/\overline{A})} = \frac{0{,}3\,.\,0{,}4}{0{,}3\,.\,0{,}4 + 0{,}7\,.\,0{,}6} = 0{,}22$$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}).P(\overline{B}/\overline{A})}{P(\overline{A}).P(\overline{B}/\overline{A}) + P(A).P(\overline{B}/A)} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}4}{0{,}7\,.\,0{,}4 + 0{,}3\,.\,0{,}6} = 0{,}608$$

7.- Un psicólogo industrial, por experiencias anteriores, conoce que el 90 por 100 de las personas que inician un determinado tratamiento técnico terminan con éxito. La proporción de personas en entrenamiento y con experiencia previa es del 10 por 100 de entre las personas que completaron con éxito su entrenamiento y del 25 por 100 de entre aquellos que no terminaron con éxito su entrenamiento. Se pide:
Probabilidad de que una persona con experiencia anterior supere el entrenamiento con éxito.
¿Podemos concluir que la experiencia previa influye en el éxito del entrenamiento?

<u>Solución.-</u>

Sean los sucesos:
A = 'Una persona supera con éxito el entrenamiento'
B = 'Una persona tiene experiencia previa'

Según las hipótesis, se tiene:

$$P(A) = 0,9 \qquad P(\overline{A}) = 0,1 \qquad P(B/A) = 0,1 \qquad P(B/\overline{A}) = 0,25$$

Se pide $P(A/B)$, que según el teorema de Bayes, será:

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B/A)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A) + P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}$$

con lo cual, $P(A/B) = \dfrac{0,9 \,.\, 0,1}{0,9 \,.\, 0,1 + 0,1 \,.\, 0,25} = 0,78$

Comparando $P(A) = 0,9$ y $P(A/B) = 0,78$ se observa una diferencia entre los dos sucesos, a favor de $P(A)$: En consecuencia, en este entrenamiento la experiencia previa influye desfavorablemente en el éxito del mismo.

8.- Se considera una población en la que el 40 por 100 de las familias tienen automóvil, el 20 por 100 tienen ingresos superiores a 6000 euros, el 50 por ciento tienen ingresos entre 2500 y 6000 euros.
De los que tienen automóvil el 50 por ciento tienen ingresos superiores a 2500 euros, y de los que no tienen automóvil el 60 por 100 tienen ingresos entre 2500 y 6000 euros.
Se realiza una encuesta al azar en dicha población. Se pide:
Probabilidad de que se seleccione una familia que tenga automóvil o sus ingresos sean superiores a 6000 euros.
Probabilidad de que se seleccione una familia con automóvil y con ingresos entre 2500 y 6000 euros.
¿Qué tanto por ciento de familias que no tienen automóvil tienen ingresos superiores a 6000 euros?
¿Son, la posesión del automóvil y los ingresos de la familia independientes en esta población?

Solución.-

Sean los sucesos:

A = 'La familia seleccionada posee automóvil'
I_1= 'La familia seleccionada tiene ingresos inferiores a 2500 euros'
I_2= 'La familia seleccionada tiene ingresos entre 2500 euros y 6000 euros'
I_3= 'La familia seleccionada tiene ingresos superiores a 6000 euros'

Según las hipótesis de la población, se tiene:

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}6 \qquad P(I_2) = 0{,}5 \qquad P(I_3) = 0{,}2$$

$$P(I_1) = 1 - P(I_2) - P(I_3) = 1 - 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3 \qquad P(I_1 / A) = 0{,}5 \qquad P(I_2 / \overline{A}) = 0{,}6$$

En otras palabras, con esta notación se solicita:

a) $P(A \cup I_3)$ b) $P(A \cap I_2)$ c) $P(I_3 / \overline{A})$

NOTA.- En el ejercicio, para calcular algunas de las probabilidades en función de las conocidas, se tendrá como base consideraciones de la probabilidad condicionada:

♦ $P(B / A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A).P(B / A)$

$P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A / B)$

en consecuencia, $\begin{cases} P(B/A) = \dfrac{P(B).P(A/B)}{P(A)} \\ \\ P(A/B) = \dfrac{P(A).P(B/A)}{P(B)} \end{cases}$

♦ Siendo, $P(\overline{A}/B) + P(A/B) = 1 \;\mapsto\; P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B) = 1 - \dfrac{P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}{P(B)}$

$$P(B/A) = \frac{P(B).P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B).\left[1 - P(\overline{A}/B)\right]}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}.\left[1 - \frac{P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}{P(B)}\right]$$

análogamente, $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B).P(\overline{A}/B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B).\left[1 - P(A/B)\right]}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B)}{P(\overline{A})}.\left[1 - \dfrac{P(A).P(B/A)}{P(B)}\right]$

$$P(A \cup I_3) = P(A) + P(I_3) - P(A \cap I_3)$$

$P(A \cap I_3) = P(I_3/A).P(A)$ *probabilidad condicionada*

$P(I_1/A) + P(I_2/A) + P(I_3/A) = 1$ *sistema completo de sucesos*

$P(I_3/A) = 1 - P(I_1/A) - P(I_2/A)$

Ahora tenemos que poner $P(I_2/A)$ en función de las probabilidades conocidas.

Para ello, $P(I_2/A) = \dfrac{P(I_2 \cap A)}{P(A)}$

sabemos que $P(A/I_2) = \dfrac{P(A \cap I_2)}{P(I_2)} \mapsto P(A \cap I_2) = P(I_2).P(A/I_2)$

con lo cual,

$$P(I_2/A) = \frac{P(I_2).P(A/I_2)}{P(A)} = \frac{P(I_2).\left[1 - P(\overline{A}/I_2)\right]}{P(A)} = \frac{P(I_2)}{P(A)}.\left[1 - \frac{P(\overline{A}).P(I_2/\overline{A})}{P(I_2)}\right]$$

entonces, $P(I_2/A) = \dfrac{0,5}{0,4}.\left[1 - \dfrac{0,6\,.\,0,6}{0,5}\right] = 0,35 \qquad P(I_2/A) = \underline{0,35}$

luego,

$P(I_3/A) = 1 - P(I_1/A) - P(I_2/A) = 1 - 0,5 - 0,35 = \underline{0,15}$

$P(A \cap I_3) = P(I_3/A).P(A) = 0,15\,.\,0,4 = 0,06$

$$P(A \cup I_3) = P(A) + P(I_3) - P(A \cap I_3) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}06 = 0{,}54$$

Para hallar $P(A \cap I_2)$, tenemos en cuenta:

$$P(A / I_2) = \frac{P(A \cap I_2)}{P(I_2)} \mapsto P(A \cap I_2) = P(I_2).P(A / I_2)$$

en donde, $P(A / I_2) = 1 - P(\overline{A} / I_2) = 1 - \dfrac{P(\overline{A}).P(I_2 / \overline{A})}{P(I_2)} = 1 - \dfrac{0{,}6\,.\,0{,}6}{0{,}5} = 0{,}28$

con lo cual, $P(A \cap I_2) = 0{,}5\;\; 0{,}28 = 0{,}14$

Análogamente, para calcular $P(I_3 / \overline{A})$

$$P(I_3 / \overline{A}) = \frac{P(I_3 \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(I_3).P(\overline{A} / I_3)}{P(\overline{A})} = \frac{P(I_3)}{P(\overline{A})}.\big[1 - P(A / I_3)\big] =$$

$$= \frac{P(I_3)}{P(\overline{A})}.\left[1 - \frac{P(A).P(I_3 / A)}{P(I_3)}\right] = \frac{0{,}2}{0{,}6}.\left[1 - \frac{0{,}4\,.\,0{,}15}{0{,}2}\right] = 0{,}313$$

Para comprobar que la posesión del automóvil y los ingresos de la familia son independientes, basta con observar el suceso A y cualquiera de los sucesos I_2 o I_3

$$P(A \cap I_3) = 0{,}06 \neq 0{,}4\,.\,0{,}2 = P(A).P(I_3)$$
$$P(A \cap I_2) = 0{,}14 \neq 0{,}4\,.\,0{,}5 = P(A).P(I_2)$$

Otra forma de verificarlo, sería, por ejemplo: $P(I_2 / A) = 0{,}35 \neq 0{,}5 = P(I_2)$

En definitiva, los sucesos no son independientes, que la familia posea o no automóvil proporciona información sobre sus ingresos.

VARIABLES ALEATORIAS

9.- En un grupo de estudiantes de Economía se ha realizado un pequeño análisis de la relación existente entre el número de días semanales dedicados al estudio (X) y el número de convocatorias que se necesitaron para aprobar la asignatura (Y). Los resultados aparecen recogidos en la siguiente tabla de contingencia:

Y / X	1	2	3
1	5	8	10
2	10	6	4
3	20	2	1

A partir de esta información:
Obtener las distribuciones marginales de X e Y.
Obtener la distribución de X condicionada a que Y tome el valor 3.
Obtener la distribución de Y condicionada a que X sea mayor o igual que 2.
Analizar si X e Y son independientes.

<u>Solución:</u>

a) La variable aleatoria discreta (X, Y) tiene distribución de probabilidad:

N = 66   nº total de datos

Y / X	1	2	3	p_{x_i}
1	$5/66 = 0{,}08$	$8/66 = 0{,}12$	$10/66 = 0{,}15$	0,35
2	$10/66 = 0{,}15$	$6/66 = 0{,}09$	$4/66 = 0{,}06$	0,30
3	$20/66 = 0{,}30$	$2/66 = 0{,}03$	$1/66 = 0{,}02$	0,35
p_{y_j}	0,53	0,24	0,23	1

Las distribuciones marginales de las variables aleatorias X e Y son:

$X = x_i$	$p_{x_i} = P(X = x_i)$
1	0,35
2	0,30
3	0,35
	$p_{x_i} = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}$

$Y = y_j$	$p_{y_j} = P(Y = y_j)$
1	0,53
2	0,24
3	0,23
	$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$

c) Distribución de X condicionada a que $Y = 3$:

$X = x_i$	$P(X = x_i / Y = 3)$
1	$0{,}15/0{,}23 = 0{,}65$
2	$0{,}06/0{,}23 = 0{,}26$
3	$0{,}02/0{,}23 = 0{,}08$
	$\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i / Y = 3) = 1$

Recordemos que,

$$P\left[X = x_i / Y = 3\right] = \frac{P\left[X = x_i \,;\, Y = 3\right]}{P(Y = 3)} = \frac{p_{i3}}{p_{y_3}}$$

c) Distribución de Y condicionada a que $X \geq 2$:

$Y = y_j$	$P(Y = y_j / X \geq 2)$
1	$(0{,}15 + 0{,}30)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}7$
2	$(0{,}09 + 0{,}03)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}18$
3	$(0{,}06 + 0{,}02)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}12$
	$\sum_{j=1}^{3} P(Y = y_j / X \geq 2) = 1$

d) X e Y son independientes si $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j} \quad \forall \ (x_i, y_j)$

en este sentido, $p_{11} = 0{,}08 \quad p_{x_1} = 0{,}35 \quad p_{y_1} = 0{,}53$

$$p_{x_1} \cdot p_{y_1} = (0{,}35) \cdot (0{,}53) \neq p_{11} = 0{,}08$$

En consecuencia, no son independientes.

10.- Se lanzan tres monedas al aire. Sea la variable aleatoria X = "número de caras que se obtienen". Se pide:

Distribución de probabilidad de X
Función de distribución de X y su representación gráfica.
Media, varianza y desviación típica de X
Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras
Probabilidad de que salgan al menos dos caras

Solución:

a) El espacio muestral es
$\Omega = \left\{(c,c,c), (c,c,e), (c,e,c), (e,c,c), (c,e,e), (e,c,e), (e,e,c), (e,e,e)\right\}$

siendo X = "número de caras que se obtienen", se tiene:

$$\begin{array}{ll} X(c,c,c)=3 & P(X=3)=1/8 \\ X(c,c,e)=X(c,e,c)=X(e,c,c)=2 & P(X=2)=3/8 \\ X(c,e,e)=X(e,c,e)=X(e,e,c)=1 & P(X=1)=3/8 \\ X(e,e,e)=0 & P(X=0)=1/8 \end{array}$$

La distribución de probabilidad es, en consecuencia,

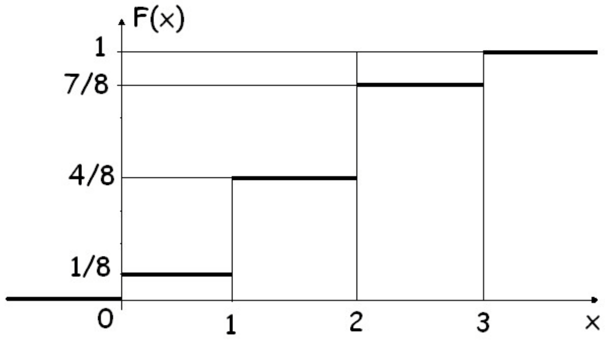
$X=x_i$	$P(X=x_i)$	$x_i.\,P(X=x_i)$	X^2	$x_i^2.\,P(X=x_i)$
$x_1=0$	$1/8$	0	0	0
$x_2=1$	$3/8$	$3/8$	1	$3/8$
$x_3=2$	$3/8$	$6/8$	4	$12/8$
$x_4=3$	$1/8$	$3/8$	9	$9/8$
	$\sum P(X=x_i)=1$	$\sum x_i.\,P(X=x_i)=12/8$		$\sum x_i^2.\,P(X=x_i)=24/8$

b) La función de distribución $F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x} P(X=x_i)$ (donde x_i un valor de X)

$$\begin{array}{ll} x<0 & F(x)=P(X\le x)=P(\phi)=0 \\ 0\le x<1 & F(x)=P(X\le x)=P(X=0)=1/8 \\ 1\le x<2 & F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)=4/8 \\ 2\le x<3 & F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=7/8 \\ x\ge 3 & F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \end{array}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/8 & 0\le x<1 \\ 4/8 & 1\le x<2 \\ 7/8 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, . \, P(X = x_i) = \frac{12}{8} = 1{,}5$

Varianza $\sigma_x^2 = E(X-\mu_x)^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . \, P(X = x_i) - (\mu_x)^2 =$

$$= \frac{24}{8} - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

d) $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

o también: $P(X \le 2) = F(2) = \frac{7}{8}$

e) $P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

o también: $P(X \ge 2) = 1 - P(X<2) = 1 - F(1) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

11.- Una empresa de transportes está analizando el número de veces que falla la máquina expendedora de billetes. Dicha variable tiene como función de cuantía:

$$P(X = x_i) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^{x_i} \qquad x_i = 0, 1, 2, \cdots$$

¿Cuál es la probabilidad de que un día la máquina no falle?
¿Cuál es la probabilidad de que un día falle menos de 4 veces?
¿Cuál es la probabilidad de que falle 5 veces?

<u>Solución:</u>

a) $P(X = 0) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^{0} = 0{,}7$

b) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}3^{0} + 0{,}7 \cdot 0{,}3^{1} + 0{,}7 \cdot 0{,}3^{2} + 0{,}7 \cdot 0{,}3^{3} = 0{,}7 \cdot \left(0{,}3^{0} + 0{,}3^{1} + 0{,}3^{2} + 0{,}3^{3}\right) = 0{,}9919$

Nota.- Adviértase la conveniencia de considerar la suma de una progresión geométrica

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \, . \, r}{1 - r} \quad \mapsto \quad S_4 = \left(0{,}3^{0} + 0{,}3^{1} + 0{,}3^{2} + 0{,}3^{3}\right) = \frac{a_1 - a_4 \, . \, r}{1 - r} = \frac{1 - 0{,}3^{3} \, . \, 0{,}3}{1 - 0{,}3} = 1{,}417$$

En esta línea,

$$P(X < n) = 0{,}7 \cdot \left(0{,}3^{0} + 0{,}3^{1} + 0{,}3^{2} + 0{,}3^{3} + \cdots + 0{,}3^{n}\right) = 0{,}7 \, . \, \frac{1 - 0{,}3^{n-1} \, . \, 0{,}3}{1 - 0{,}3} = 0{,}7 \, . \, \frac{1 - 0{,}3^{n}}{0{,}7}$$

$P(X < n) = 0{,}7 \cdot \left(0{,}3^{0} + 0{,}3^{1} + 0{,}3^{2} + 0{,}3^{3} + \cdots + 0{,}3^{n}\right) = 1 - 0{,}3^{n}$, en consecuencia,

$$P(X < 4) = 1 - 0{,}3^{4} = 0{,}9919$$

c) $P(X = 5) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^{5} = 0{,}001701$

12.- La demanda de una empresa es de tipo aleatorio y tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla
Hallar la función de distribución y representarla
Media, varianza y desviación típica
$P(X \le 1)$
$P(X = 0)$

<u>Solución</u>.-

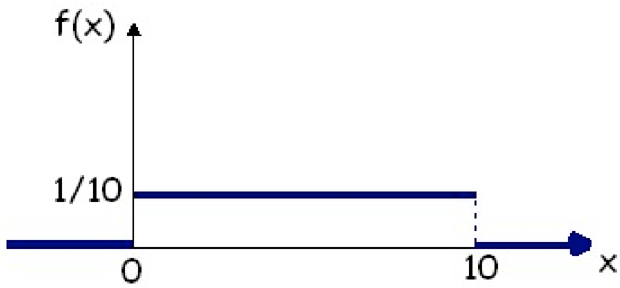
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificarse

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{0}^{10} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{10}^{\infty} f(x)\,dx}_{=0}$$

con lo que, $1 = \int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} k\,dx = \left[k\,.\,x\right]_0^{10} = 10\,k \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{10}$

La función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

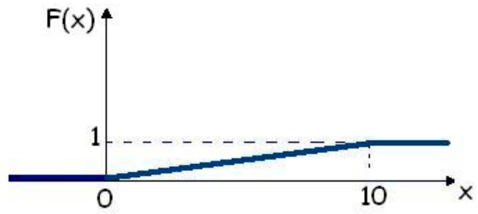


b) La función de distribución $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{si } 0 \le x \le 10 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{10}\,dx = \frac{x}{10} \\ \text{si } x > 10 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{10} \frac{1}{10}\,dx + \int_{10}^{x} 0\,dx = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x/10 & \text{si } 0\le x\le 10\\ 1 & \text{si } x>10\end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^{10} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^{10} x\,.\,\frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$

Varianza

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \int_0^{10} x^2\,.\,f(x)\,dx - (\mu_x)^2 = \int_0^{10} x^2\,.\,\frac{1}{10}\,dx - (5)^2 = \left[\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} - 25 = \frac{25}{3}$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2{,}9$

d) $P(X\le 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\,(x)_0^1 = \frac{1}{10}$ o también, $P(X\le 1) = F(1) = \frac{1}{10}$

e) $P(X=0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_0^0 \frac{1}{10}\,dx = 0$ o también, $P(X=0) = F(0) = 0$

13.- En un hospital se comprobó que el peso en kilos de los niños al nacer era una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla
Hallar la función de distribución y representarla
Media, varianza y desviación típica
Probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 kilos
Probabilidad de que pese entre 2 y 3,5 kilos
¿Qué debe pesar un niño para tener inferior o igual a su peso al 90 % de los niños?.

Solución.-

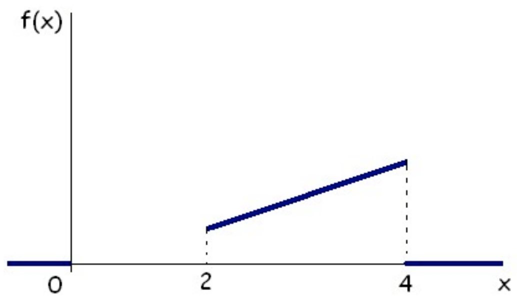
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificarse

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{2}^{4} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{4}^{\infty} f(x)\,dx}_{=0}$$

con lo que, $1 = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 k\,x\,dx = k\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_2^4 = 6\,k \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{16}$

La función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} x/6 & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

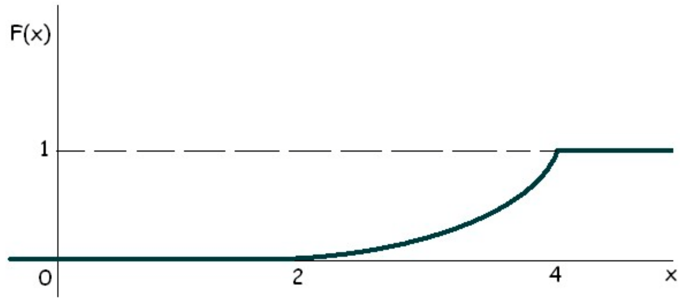


b) La función de distribución $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 2 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{si } 2 \le x \le 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_2^x \dfrac{x}{6}\,dx = \left[\dfrac{x^2}{12}\right]_2^x = \dfrac{x^2-4}{12} \\ \text{si } x > 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_2^4 \dfrac{x}{6}\,dx + \int_4^x 0\,dx = \left[\dfrac{x^2}{12}\right]_2^4 = 1 \end{cases}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<2 \\ \dfrac{x^2-4}{12} & \text{si } 2\le x\le 4 \\ 1 & \text{si } x>4 \end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_2^4 x\,.\,f(x)\,dx = \int_2^4 x\,.\,\frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_2^4 = 3{,}1\ \text{kilos}$

Varianza

$$\sigma_x^2 = E(X^2)-(\mu_x)^2 = \int_2^4 x^2\,.\,f(x)\,dx - (\mu_x)^2 = \int_2^4 x^2\,.\,\frac{x}{6}\,dx - (3{,}1)^2 = \left[\frac{x^4}{24}\right]_2^4 - 9{,}61 = 0{,}39$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{0{,}39\ \text{kilos}^2} = 0{,}6\ \text{kilos}$

d) $P(X>3) = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_3^4 = 0{,}583$

o también, $P(X>3) = 1-P(X\le 3) = 1-F(3) = 1-\dfrac{3^2-4}{12} = 0{,}583$

e) $P(2\le X\le 3{,}5) = \int_2^{3,5} f(x)\,dx = \int_2^{3,5} \frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_2^{3,5} = 0{,}6875$

o también, $P(2\le X\le 3{,}5) = F(3{,}5)-F(2) = \dfrac{3{,}5^2-4}{12} - 0 = 0{,}6875$

f) $P(X\le a) = F(a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a^2-4}{12} = 0{,}9 \quad \mapsto \quad a^2-4 = 10{,}8 \quad \mapsto \quad a = \sqrt{14{,}8} = 3{,}8$

Es decir, el niño debe pesar 3,8 kilos para tener el 90% de los niños con un peso inferior o igual.

14.- Una variable aleatoria X tiene como función de distribución:

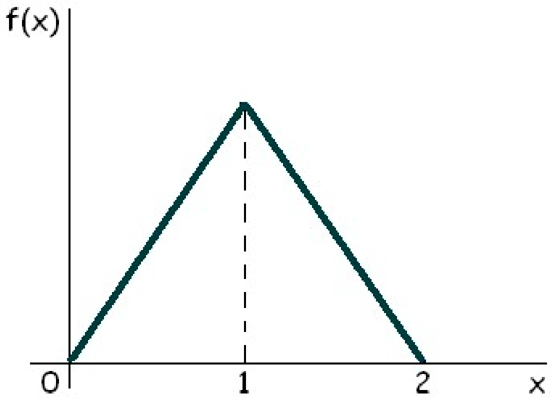
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

Hallar la función de densidad. Representarla
Media, varianza y desviación típica
$P\left(\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{3}{2}\right)$

Solución.-

a) La función de densidad f(x) es la derivada de la función de distribución F(x) en los puntos donde exista la derivada, por tanto

$$f(x)=\frac{d\,F(x)}{dx}=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x\le 1\\ 2-x-1 & 1<x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$$



b) Media

$$\mu_x=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,.\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\,.\,f(x)\,dx+\int_1^2 x\,.\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\,.\,x\,dx+\int_1^2 x\,.(2-x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=1$$

Varianza

$$\sigma_x^2=E(X^2)-(\mu_x)^2=\int_0^1 x^2\,.\,f(x)\,dx+\int_1^2 x^2\,.\,f(x)\,dx-(\mu_x)^2=$$

$$=\int_0^1 x^2\,.\,x\,dx+\int_1^2 x^2\,.(2-x)\,dx-(1)^2=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2-1=\frac{14}{12}-1=\frac{1}{6}$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{6}} = 0{,}41$

c) $P\left(\dfrac{1}{2} \le X \le \dfrac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3/2} (2-x)\,dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3/2} = \frac{3}{4}$$

o también, $P\left(\dfrac{1}{2} \le X \le \dfrac{3}{2}\right) = F\left(\dfrac{3}{2}\right) - F\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(3 - \dfrac{9}{8} - 1\right) - \left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{3}{4}$

15.- La demanda diaria de un determinado artículo (x) es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & 0 < x \leq 4 \\ \dfrac{12-x}{64} & 4 < x \leq 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$B^o = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ 10 & \text{si} \quad 4 < x \leq 8 \\ 15 & \text{si} \quad 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

Calcular:

Probabilidad de que en un día cualquiera la demanda sea superior a 10

Probabilidad de que la demanda sea inferior a 3

La esperanza y la varianza de la demanda

Función de distribución de la demanda

Función de cuantía y función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios.

Esperanza y varianza de la variable beneficios

Solución.-

a) $P(X > 10) = \displaystyle\int_{10}^{12} f(x)\,dx = \int_{10}^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left[12x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{12} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

b) $P(X < 3) = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{8}\left[x\right]_0^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

c) Media o Esperanza

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^4 x\,.\,f(x)\,dx + \int_4^{12} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^4 x\,.\frac{1}{8}\,dx + \int_4^{12} x\,.\frac{12-x}{64}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx + \frac{1}{64}\int_4^{12} (12x - x^2)\,dx = \frac{1}{16}\left[x^2\right]_0^4 + \frac{1}{64}\left[6x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^{12} =$$

$$= 1 + \frac{1}{64}\left(864 - \frac{1728}{3} - 96 + \frac{64}{3}\right) = \frac{13}{3} = 4{,}33$$

Varianza

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\,dx=\int_0^4 x^2.f(x)\,dx\;+\int_4^{12} x^2.f(x)\,dx=\int_0^4 x^2.\frac{1}{8}\,dx+\int_4^{12} x^2.\frac{12-x}{64}\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx+\frac{1}{64}\int_4^{12}(12x^2-x^3)\,dx=\frac{1}{24}\left[x^3\right]_0^4+\frac{1}{64}\left[4x^3-\frac{x^4}{4}\right]_4^{12}=$$

$$=\frac{64}{24}+\frac{1}{64}\left(6912-5184-256+64\right)=\frac{5120}{192}=\frac{80}{3}=26{,}67$$

$$\sigma_x^2=V(X)=E(X^2)-(\mu_x)^2=\frac{80}{3}-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\frac{71}{9}=7{,}89$$

d) La función de distribución de la demanda $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x)=\begin{cases} \text{si } x<0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0 \\ \text{si } 0\le x<4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^x \frac{1}{8}\,dx=\frac{x}{8} \\ \text{si } 4\le x<12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{8}\,dx+\int_4^x \frac{12-x}{64}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2}+12x-40\right) \\ \text{si } x\ge 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^4 \frac{1}{8}\,dx+\int_4^{12} \frac{12-x}{64}\,dx+\int_{12}^{x} 0\,dx=1 \end{cases}$$

En resumen,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{8} & \text{si } 0\le x<4 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2}+12x-40\right) & \text{si } 4\le x<12 \\ 1 & \text{si } x\ge 12 \end{cases}$$

e) Calculamos la función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios:

$$B^o=\begin{cases} -5 & \text{si } x<2 \\ 5 & \text{si } 2<x\le 4 \\ 10 & \text{si } 4<x\le 8 \\ 15 & \text{si } 8<x\le 12 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8} & 0<x\le 4 \\ \frac{12-x}{64} & 4<x\le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

B_i^o	$P(B^o = B_i^o)$
-5	$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
5	$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
10	$\int_4^8 f(x)\,dx = \int_4^8 \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_4^8 = 0{,}375$
15	$\int_8^{12} f(x)\,dx = \int_8^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_8^{12} = 0{,}125$

La función de distribución $F(B^o) = P(B^o \leq B_i^o) = \sum_{B_i^o \leq B^o} P(B^o = B_i^o)$

B_i^o	$P(B^o = B_i^o)$	$F(B^o) = P(B^o \leq B_i^o)$	$B_i^o . P(B^o = B_i^o)$	$(B_i^o)^2 . P(B^o = B_i^o)$
-5	0,25	0,25	$-1{,}25$	6,25
5	0,25	0,50	1,25	6,25
10	0,375	0,875	3,75	37,5
15	0,125	1	1,875	28,125
			$\sum_{i=1}^{4} B_i^o . P(B^o = B_i^o) = 5{,}625$	$\sum_{i=1}^{4} (B_i^o)^2 P(B^o = B_i^o) = 78{,}125$

f) Media o Esperanza beneficios $\mu_{B^o} = E(B^o) = \sum_{i=1}^{4} B_i^o . P(B^o = B_i^o) = 5{,}625$

Varianza beneficios

$$E\left[(B^o)^2\right] = \sum_{i=1}^{4} (B_i^o)^2 . P(B^o = B_i^o) = 78{,}125$$

$$\sigma_{B^o}^2 = V(B^o) = E(B^{o^2}) - (\mu_{B^o})^2 = 78{,}125 - (5{,}625)^2 = 46{,}48$$

Desviación típica de los beneficios $\sigma_{B^o} = \sqrt{46{,}48} = 6{,}817$

16.- Sea (ξ, η) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} k & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Hallar k para que sea función de densidad
b) Funciones de densidad marginales. ¿Son ξ y η independientes?
c) Funciones de distribución marginales
d) Funciones de densidad condicionadas

<u>Solución</u>.-

a) Para que f(x, y) sea función de densidad tiene que verificarse

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

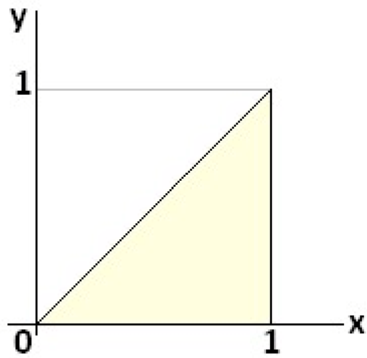
en consecuencia,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^x k\, dx\, dy = k\int_0^1\left[\int_0^x dy\right] dx = k\int_0^1 x\, dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

luego

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

es decir, que f(x, y) toma el valor 2 en el interior del triángulo



b) $$\begin{cases} f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^x 2\, dy = 2x & 0 < x < 1 \\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_y^1 2\, dx = 2 - 2y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

Son independientes si $f(x, y) = f_1(x)\,.\,f_2(y)$

$f_1(x)\,.\,f_2(y) = 2x\,.\,(2 - 2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x, y) \Rightarrow$ No son independientes

c) $$\begin{cases} F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt = \int_0^x 2t\, dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2 & 0 < x < 1 \\ F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)\, dt = \int_0^y (2 - 2t)\, dt = \left[2t - t^2\right]_0^y = 2y - y^2 & 0 < y < 1 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)} = \dfrac{2}{2-2y} & 0 < y < 1 \quad 0 < x < 1 \\ f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \dfrac{2}{2x} & 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \end{cases}$

17.- Sea (ξ, η) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| \le x \,;\, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Comprobar que $f(x, y)$ es función de densidad

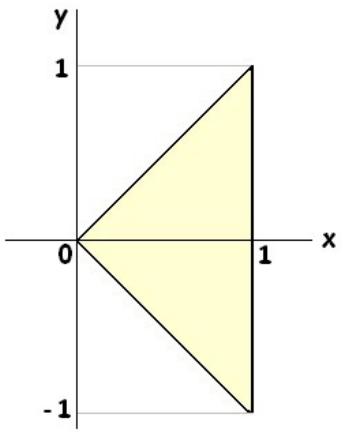
b) Hallar las medias de ξ y η

c) $P(\xi < 1/2 \,;\, \eta < 0)$ y $P(\xi > 1/2 \,;\, -1/2 < \eta < 1/2)$

<u>Solución</u>.-

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-x}^{x} dx\,dy = \int_0^1\left[\int_{-x}^{x} dy\right]dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$

Gráficamente:



b) Para hallar las medias de ξ y η hay que encontrar primero las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-x}^{x} dy = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 dx = 1 - y & 0 < y < 1 \\ \displaystyle\int_{-y}^1 dx = 1 + y & -1 < y \le 0 \end{cases}$$

en consecuencia,

$$\mu_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx = \int_0^1 x\, 2x\, dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mu_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy = \int_{-1}^{0} y\,(1+y)\, dy + \int_0^1 y\,(1-y)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 0$$

c) $P(\xi < 1/2\,;\, \eta < 0) = \int_0^{1/2}\int_{-x}^{0} \overbrace{f(x,y)}^{1}\, dx\, dy = \int_0^{1/2} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$

$P(\xi > 1/2\,;\, -1/2 < \eta < 1/2) = \int_{1/2}^{1}\int_{-1/2}^{1/2} \overbrace{f(x,y)}^{1}\, dx\, dy = \int_{1/2}^{1} dx = [x]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$

18.- Sea (ξ, η) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1 \;;\; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Función de distribución
b) Funciones de densidad marginales
c) ¿Son ξ y η independientes?

<u>Solución</u>.-

a)

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv = \int_0^x\int_0^y (u+v)\, du\, dv = \int_0^x \left[\int_0^y (u+v)\, dv\right] du =$$

$$= \int_0^x \left(uy + \frac{y^2}{2}\right) du = y\int_0^x u\, du + \frac{y^2}{2}\int_0^x du = \left[\frac{yu^2}{2} + \frac{y^2u}{2}\right]_0^x = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} \quad 0 < x < 1 \;;\; 0 < y < 1$$

en consecuencia,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \begin{cases} x \le 0\,,\, -\infty < y < \infty \\ -\infty < x < \infty\,,\, y \le 0 \end{cases} \\ \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{xy^2}{2} & 0 < x < 1\,,\, 0 < y < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} & 0 < x < 1\,,\, 1 \le y < \infty \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{y^2}{2} & 1 \le x < \infty\,,\, 0 < y < 1 \\ 1 & x \ge 1\,,\, y \ge 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \dfrac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \dfrac{1}{2} & 0 < x < 1 \\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 = y + \dfrac{1}{2} & 0 < y < 1 \end{cases}$$

c) Son independientes si $f(x,y) = f_1(x)\,.\,f_2(y)$

$$f_1(x)\,.\,f_2(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \neq x + y = f(x,y)$$

Luego no son independientes ξ y η