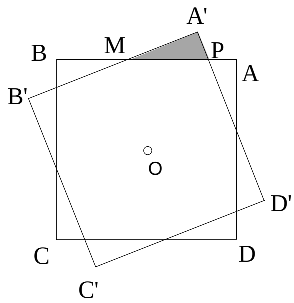
Portal Fuenterrebollo
XXXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA, TARAZONA (1998)

1.- Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

Solución 1.



Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90º$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.
El área pedida $S(\alpha)$ sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA’M.
Llamando x al cateto PA’ e y al cateto A’M, el área de cuatro triángulos vale 2xy. Como el lado B’A’ vale 1, tenemos:

$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

pero $x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\left(1 + \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha}$$

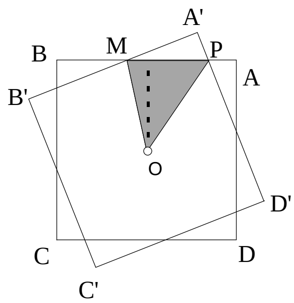
sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1} \text{ con } 0 \le \alpha \le 90º$$

Solución 2.



El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura OPM.
Tomando como base b = MP, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale ½.
En el triángulo PA’M se tiene:
MA’ = b cos α,   PA’ = b sen α ; pero BM = MA’ y PA = PA’, además:

$$BM + MP + PA = 1 \Leftrightarrow b\cos\alpha + b + b\,\mathrm{sen}\,\alpha = 1,$$

de donde

$$b = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 90^{\circ}$$

2.- Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución:
Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.
Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \leq s \leq 21 \qquad (1)$$

Si n = xyzt, tenemos:

$$1000x + 100y + 10z + t = s^3 \qquad (2)$$
$$x + y + z + t = s$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \qquad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9:

$$16 \cdot 17 \cdot 18; \quad 17 \cdot 18 \cdot 19 \text{ y } 18 \cdot 19 \cdot 20$$

sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º

$$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$$

resulta inmediatamente x = 4; y = 9; z = 1, valores que llevados a (2) con s = 17 se obtiene t = 3 y finalmente n = 4913

2º

$$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$$

de donde x = 5; y = 8; z = 3, valores que llevados a (2) con s = 18 se obtiene t = 2 y finalmente n = 5832

3º

$$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$$

resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

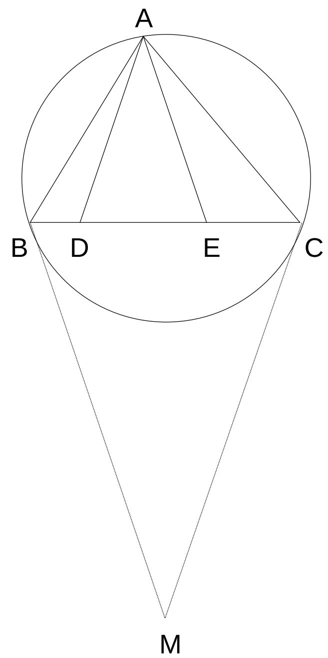
Resumiendo, las únicas soluciones son

4913 y **5832**

3.- Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Solución:



Los triángulos ΔABC y ΔADC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que:

$\angle ADC = \angle BCM = \angle BAC$ (la primera igualdad por ser AC y CM paralelas y la segunda por ser $\angle BCM$ ángulo semiinscrito) y el ángulo $\angle ACD$ es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \quad (1)$$

De modo análogo los triángulos ΔABC y ΔABE son semejantes pues:

$\angle AEB = \angle EBM = \angle BAC$ y el ángulo $\angle ABE$ es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 \quad (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.

4.- Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

Solución.

Sean α, β, γ los tres ángulos y supongamos $\alpha \le \beta \le \gamma$. Si fuera $\gamma \ge \frac{\pi}{2}$, tendría que ser $\alpha < \frac{\pi}{4}$ y entonces tg α no es entero.

Si tg α > 1, entonces $\alpha \ge$ arc tg 2 > arc tg $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, imposible porque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Por tanto tg α = 1 y $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, con lo que:

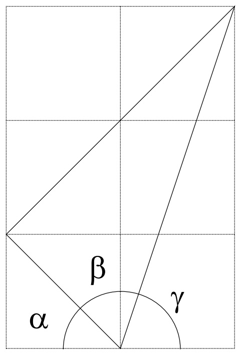
$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -1 = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}$$

relación que operada se convierte en:

$$(\operatorname{tg}\beta - 1)(\operatorname{tg}\gamma - 1) = 2$$

de donde, por ser enteros positivos, se sigue tg β = 2 y tg γ = 3.

Existe una visualización “sin palabras” de la solución: arc tg 1 + arc tg 2 + arc tg 3 = π.



5.- Hallar todas las funciones $\mathbf{f:N \to N}$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2\,f(n)$$

para n = 1, 2, 3, ...

Solución:
Supongamos f(1) = b. Entonces, f(1 + b) = 2b, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 +1\,) < \ldots < f(1+b) = 2b = b + b.$$

y resulta que f(1), f(2),….f(1+ b) son b + 1 naturales, distintos, el primero vale b y el último 2b, por tanto han de ser consecutivos.
resulta entonces:

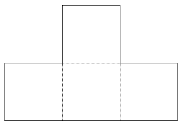
$$f(1) = b,\ f(2) = 1 + b,\ f(3) = 2 + b, \ldots\ldots, f(1 + b) = b + b.$$

En general, para n > 1, si f(n) = c , f(n + c) = 2c = c + c y resulta que:

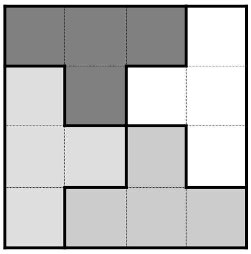
c = f(n) < f(n + 1) <.…< f(n + c) = c + c y los números f(n), f(n + 1), ….., f(n + c) son consecutivos.
Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

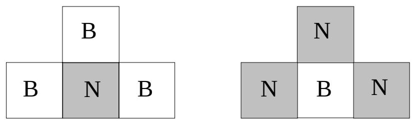
6.- Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo:



Solución:
Evidentemente n^2 debe ser múltiplo de 4 y, por tanto n necesariamente es par.
Si $n = 4k$ podemos dividir cualquier cuadrado $n \times n$ en k^2 sub-cuadrados del tipo 4×4 cada uno de los cuales lo podemos rellenar en la forma señalada en la figura de la izquierda.



Queda sólo considerar el caso $n = 4k + 2$. Veamos que en ese caso la repuesta es negativa.
Supongamos que fuera posible.
Si pintamos cada cuadradito alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza:



Sea a el número de piezas del tipo de las de la izquierda y b el número de piezas del tipo de las de la derecha.
Tenemos:

$$a + b = \frac{(4k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

luego a + b ha de ser impar.

Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene:
$3a + b = 3b + a \Leftrightarrow a = b$, de donde $a + b = 2a$ ha de ser par en contradicción con lo anterior.