Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES. DISTRIBUCIONES

En muchas ocasiones es necesario estudiar conjuntamente dos características de un fenómeno aleatorio, es decir, el comportamiento conjunto de dos variables aleatorias, intentando explicar la posible relación existente entre ellas.

Para estudiar conjuntamente las dos variables aleatorias (X, Y), esto es, la variable aleatoria bidimensional, es necesario conocer la distribución de probabilidad conjunta de ambas variables.

VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL DISCRETA

Una variable aleatoria (X, Y) se dice que es discreta si X e Y son discretas.

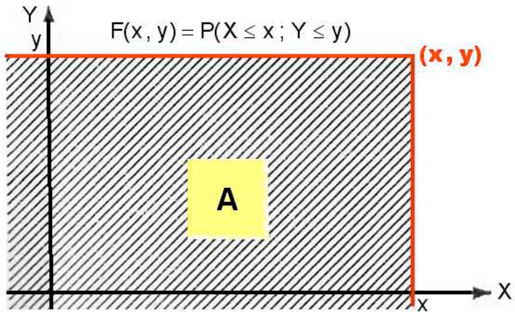
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BIDIMENSIONAL DISCRETA: Tabla de doble entrada formada por los pares de valores (x, y) que toma la variable (X, Y) junto con sus probabilidades.

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	$\boxed{p_{ij}}$	$\cdots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}		p_{nm}

siendo $p_{ij} = P(X = x \,;\, Y = y)$ con $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$

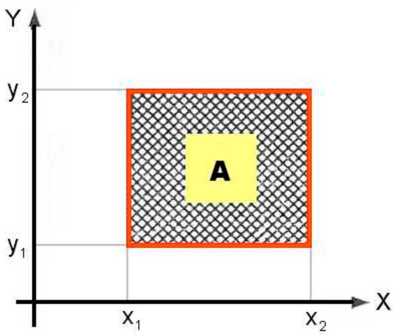
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BIDIMENSIONAL DISCRETA: También llamada distribución de probabilidad conjunta, es la función acumulativa

$$F(x, y) = P(X \leq x \,;\, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} P(X = x_i \,;\, Y = y_j)$$



$F(x,y)$ es la suma de todos los puntos de la región A.

$$P\left[x_1 < X \le x_2\ ;\ \ y_1 < Y \le y_2\right] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$



La probabilidad $P\left[x_1 < X \le x_2\ ;\ \ y_1 < Y \le y_2\right]$ representa la probabilidad de que un punto pertenezca a la región A.

MOMENTOS DE UNA VARIABLE BIDIMENSIONAL DISCRETA: El momento de órdenes (r, s) respecto a los parámetros (c, k) de una variable aleatoria bidimensional discreta, se define:

$$M_{r,s} = E\left[(X-c)^r\,(Y-k)^s\right] = \sum_i \sum_j (x_i - c)^r \left(y_j - k\right)^s p_{ij}$$

- **Momentos respecto al origen cuando $c = k = 0$, siendo los más importantes:**

$$\alpha_{10} = E\left[(X)^1 (Y)^0\right] = E(X) = \mu_X = \sum_i \sum_j (x_i - 0)^1 \left(y_j - 0\right)^0 p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i\, p_{ij}$$

$$\alpha_{01} = E\left[(X)^0 (Y)^1\right] = E(Y) = \mu_Y = \sum_i \sum_j (x_i - 0)^0 \left(y_j - 0\right)^1 p_{ij} = \sum_i \sum_j y_j\, p_{ij}$$

$$\alpha_{11} = E\left[(X)^1 (Y)^1\right] = E(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - 0)^1 \left(y_j - 0\right)^1 p_{ij} = \sum_i \sum_j x_1\, y_j\, p_{ij}$$

- **Momentos respecto a la media o centrales, cuando $c = \alpha_{10} = \mu_X$ y $k = \alpha_{01} = \mu_Y$, siendo los más importantes:**

$$\mu_{20} = E\left[(X - \mu_X)^2 (Y - \mu_Y)^0\right] = \sigma_X^2 = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^2 \left(y_j - \mu_Y\right)^0 p_{ij} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^2\, p_{ij}$$

$$\mu_{02} = E\left[(X - \mu_X)^0 (Y - \mu_Y)^2\right] = \sigma_Y^2 = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^0 \left(y_j - \mu_Y\right)^2 p_{ij} = \sum_i \sum_j (y_j - \mu_Y)^2\, p_{ij}$$

$$\mu_{11} = E\left[(X - \mu_X)^1 (Y - \mu_Y)^1\right] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^1 \left(y_j - \mu_Y\right)^1 p_{ij} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)\left(y_j - \mu_Y\right) p_{ij}$$

La covarianza μ_{11} se pude expresar: $\mu_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\,.\alpha_{01}$, es decir, $\mu_{11} = \alpha_{11} - \mu_X\,.\,\mu_Y$

DISTRIBUCIONES MARGINALES DISCRETAS: Dada una distribución de probabilidad bidimensional discreta:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	$\boxed{p_{ij}}$	$\cdots$	p_{im}	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}		p_{nm}	$p_{n\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	$p_{\bullet m}$	1

Se denomina probabilidades marginales a $p_{i\bullet}$ y $p_{\bullet j}$

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \qquad p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \qquad \text{donde} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

- Las **distribuciones marginales** de la X y de la Y serán, respectivamente:

X	$p_{i\bullet}$
x_1	$p_{1\bullet}$
x_2	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$
x_i	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_{n\bullet}$
	1

Y	$p_{\bullet j}$
y_1	$p_{\bullet 1}$
y_2	$p_{\bullet 2}$
$\vdots$	$\vdots$
y_j	$p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$
y_m	$p_{\bullet m}$
	1

Las funciones de distribución marginales serán:

$$F_1(x) = F(x, \infty) = P(X \le x\,;\, Y < \infty) = \sum_{x_i \le x} p_{i\bullet} \qquad F_2(y) = F(\infty, y) = P(X < \infty\,;\, Y \le y) = \sum_{y_j \le y} p_{\bullet j}$$

DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS DISCRETAS: Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con distribución de probabilidad p_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n\,;\; j = 1, 2, \cdots, m)$ y con distribuciones marginales

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \qquad p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

- La distribución de probabilidad condicionada de la variable aleatoria discreta X cuando $Y = y_j$ será:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}		p_{nm}	$p_{n\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\boxed{p_{\bullet j}}$	$\cdots$	$p_{\bullet m}$	1

X	$P\left[x_i / Y = y_j\right]$
x_1	$P(x_1 / y_j) = p_{1j} / p_{\bullet j}$
x_2	$P(x_2 / y_j) = p_{2j} / p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$
x_i	$P(x_i / y_j) = p_{ij} / p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$P(x_n / y_j) = p_{nj} / p_{\bullet j}$
	1

$$P(x_i / y_j) = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P\left[X = x_i\,;\, Y = y_j\right]}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \qquad \text{con} \qquad P(Y = y_j) > 0$$

En esta expresión y_j es fijo y x_i varia sobre todos los posibles valores de la variable aleatoria X.

- La distribución de probabilidad condicionada de la variable aleatoria discreta Y cuando $X = x_i$ será:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	$\boxed{p_{i\bullet}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}		p_{nm}	$p_{n\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	$p_{\bullet m}$	1

Y	$P\left[y_j / X = x_i\right]$
y_1	$P(y_1 / x_i) = p_{i1} / p_{i\bullet}$
y_2	$P(y_2 / x_i) = p_{i2} / p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$
y_j	$P(y_j / x_i) = p_{ij} / p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$
y_m	$P(y_m / x_i) = p_{im} / p_{i\bullet}$
	1

$$P(y_j / x_i) = P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P\left[X = x_i\,;\, Y = y_j\right]}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad \text{con} \qquad P(X = x_i) > 0$$

En esta expresión x_i es fijo e y_j varia sobre todos los posibles valores de la variable aleatoria Y.

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS: Sea una variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y), se dice que X e Y son ***independientes*** sí, y sólo sí, se verifica:

$$p_{ij} = P(X = x\,;\, Y = y) = p_{i\bullet}\,.\,p_{\bullet j} \qquad \forall (x_i, y_j)$$

o bien, $P(x_1 < X \le x_2\ ;\ y_1 < Y \le y_2) = P(x_1 < X \le x_2)\,.\,P(y_1 < Y \le y_2)$

VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL CONTINUA

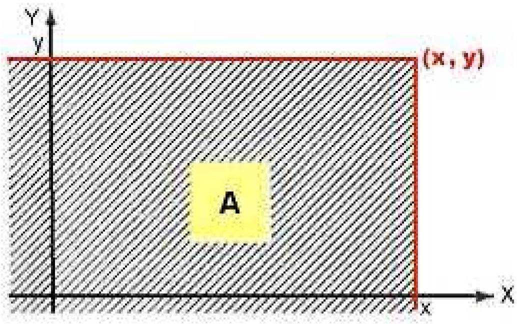
Una variable aleatoria (X, Y) se dice que es continua si X e Y son continuas.

En términos más precisos, se dice que una variable aleatoria (X, Y) es continua si existe una función no negativa $f(x, y)$ que para todos par $(x, y) \in R^2$ verifica:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$$

donde $F(x, y)$ es la *función de distribución* de (X, Y). A la función $f(x, y)$ se le denomina *función de densidad* de (X, Y).

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BIDIMENSIONAL CONTINUA: Dada una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) a la función acumulativa



$$F(x, y) = P(X \leq x\,;\, Y \leq y)$$

se denomina *función de distribución* de (X, Y)

$$P\left[x_1 < X \leq x_2\,;\; y_1 < Y \leq y_2\right] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD: Dada una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y), la *función de densidad* es una función no negativa $f(x, y)$ que verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

$$P\left[x_1 < X \leq x_2\,;\; y_1 < Y \leq y_2\right] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Se tiene entonces que la función de distribución: $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$

Si $F(x, y)$ es absolutamente continua, entonces: $\dfrac{\vartheta^2 F(x, y)}{\vartheta x\, \vartheta y} = f(x, y)$

MOMENTOS DE UNA VARIABLE BIDIMENSIONAL CONTINUA: El momento de órdenes (r, s) respecto a los parámetros (c, k) de una variable aleatoria bidimensional continua, se define:

$$M_{r,s} = E\left[(X - c)^r\, (Y - k)^s\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^r\, (y - k)^s\, f(x, y)\, dx\, dy$$

- **Momentos respecto al origen cuando $c = k = 0$, siendo los más importantes:**

$$\alpha_{10} = E\left[(X)^1 (Y)^0\right] = E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\alpha_{01} = E\left[(X)^0 (Y)^1\right] = E(Y) = \mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\alpha_{11} = E\left[(X)^1 (Y)^1\right] = E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\; f(x,y)\, dx\, dy$$

- **Momentos respecto a la media o centrales, cuando $c = \alpha_{10} = \mu_X$ y $k = \alpha_{01} = \mu_Y$, siendo los más importantes:**

$$\mu_{20} = E\left[(X-\mu_X)^2 (Y-\mu_Y)^0\right] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\mu_{02} = E\left[(X-\mu_X)^0 (Y-\mu_Y)^2\right] = \sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_Y)^2 f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\mu_{11} = E\left[(X-\mu_X)^1 (Y-\mu_Y)^1\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\, dx\, dy \qquad \textit{covarianza}$$

Supuesta en todos los casos la convergencia absoluta de las integrales.

La covarianza μ_{11} se pude expresar: $\mu_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10} . \alpha_{01}$, es decir, $\mu_{11} = \alpha_{11} - \mu_X . \mu_Y$

DISTRIBUCIONES MARGINALES CONTINUAS: Una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y), con función de distribución $F(x, y)$ y función de densidad $f(x,y)$, tiene como ***funciones de distribución marginales***:

- $F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\, du\, dy = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\, du$ *función de distribución marginal* de X

  donde $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$ se denomina *función de densidad marginal* de X

- $F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,v)\, dx\, dv = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\, dv$ *función de distribución marginal* de Y

  donde $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$ se denomina *función de densidad marginal* de Y

DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS CONTINUAS: Sea una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y), con función de distribución $F(x, y)$ y función de densidad $f(x,y)$, se define:

- *Función de distribución de X condicionada* al valor de $Y = y$:

$$F(x/y) = P(X \le x / Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\, du}{f_2(y)}$$

La función de densidad condicionada de X al valor de $Y = y$:

$$f(x/y) = \frac{dF(x/y)}{dx} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

- *Función de distribución de Y condicionada* al valor de $X = x$:

$$F(y/x) = P(Y \leq y / X = x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dv}{f_1(y)}$$

La función de densidad condicionada de Y al valor de $X = x$:

$$f(y/x) = \frac{dF(y/x)}{dy} = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS: Sea una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y), se dice que X e Y son ***independientes*** sí, y sólo sí, se verifica:

$$F(x,y) = F_1(x).F_2(y) \quad \forall (x,y) \in R^2$$

definición equivalente será: $f(x,y) = f_1(x).f_2(y) \quad \forall (x,y) \in R^2$

TRANSFORMACIONES LINEALES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS:

La función de densidad $g(z,t)$ de una variable aleatoria continua (Z,T), que surge de una transformación lineal de la variable (X, Y), existe en aquellos puntos donde el jacobiano

$$J = \frac{\vartheta(z,t)}{\vartheta(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta z}{\vartheta x} & \frac{\vartheta z}{\vartheta y} \\ \frac{\vartheta t}{\vartheta x} & \frac{\vartheta t}{\vartheta y} \end{vmatrix} \neq 0$$

siendo la nueva función de densidad: $g(z,t) = f\left[h_1(z,t), h_2(z,t)\right] . \left|J_1\right|$

donde h_1 y h_2 son las inversas, respectivamente, de g_1 y g_2

Despejando (X, Y) en la transformación se calcula el jacobiano $J_1 = \frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta x}{\vartheta z} & \frac{\vartheta x}{\vartheta t} \\ \frac{\vartheta}{\vartheta z} & \frac{\vartheta y}{\vartheta t} \end{vmatrix}$

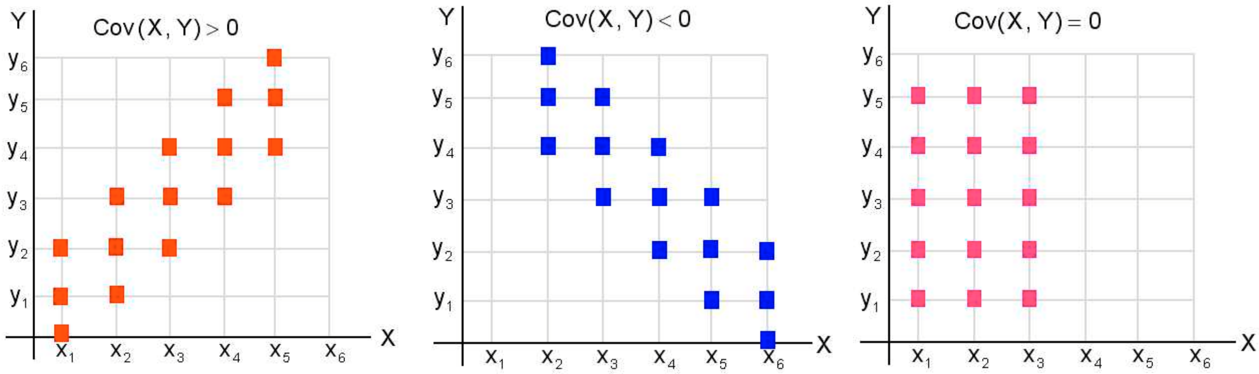
COVARIANZA. PROPIEDADES

La covarianza μ_{11} es uno de los momentos centrales de más interés, se define:

$$\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = E\big([X - E(X)].[Y - E(Y)]\big)$$

se suele representar por $\text{Cov}(X, Y)$, σ_{xy} , μ_{xy}

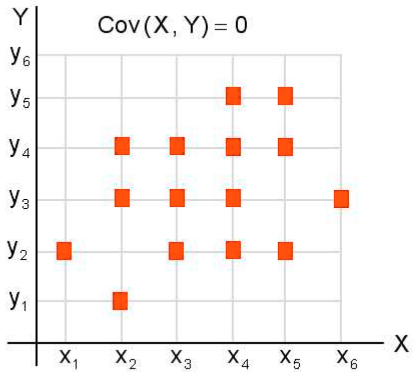
Si se representan los quince pares de valores (x_i, y_j) se obtiene la nube de puntos:



- $\text{Cov}(X, Y) > 0 \;\mapsto\; \begin{cases} \text{La variable X aumenta cuando la variable Y aumenta} \\ \text{La variable X disminuye cuando la variable Y disminuye} \end{cases}$

- $\text{Cov}(X, Y) < 0 \;\mapsto\; \begin{cases} \text{La variable X aumenta cuando la variable Y disminuye} \\ \text{La variable X disminuye cuando la variable Y aumenta} \end{cases}$

- $\text{Cov}(X, Y) = 0 \;\mapsto$ Las variables aleatorias (X, Y) son independientes



Adviértase que,

$\text{Cov}(X, Y) = 0 \;\cancel{\mapsto}$ Las variables aleatorias (X, Y) NO son independientes, existe una relación no lineal entre X e Y, relación que puede ser de tipo cuadrático.

En consecuencia, la covarianza no es una medida de las relaciones o dependencias entre dos variables aleatorias X e Y, únicamente es una medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y.

Un inconveniente para utilizar la covarianza, incluso como medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y, es que depende de las unidades de medida de las variables aleatorias. Por ejemplo, si la variable aleatoria X se expresa en cm y la variable Y en kg, la covarianza se expresa en cm. kg.
En este sentido, el coeficiente de correlación resuelve el problema al ser un número abstracto, es decir, expresarse sin unidades.

PROPIEDADES DE LA COVARIANZA

- La covarianza μ_{11} se puede expresar en función de los momentos respecto al origen:

$$\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = E\big([X - E(X)].[Y - E(Y)]\big) = \alpha_{11} - \alpha_{10}.\alpha_{01}$$

Basta desarrollar la propiedad que define la covarianza:

$$\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = E\big([X - E(X)].[Y - E(Y)]\big) = E\big([X - \alpha_{10}].[Y - \alpha_{01}]\big) =$$

$$= E\big(XY - \alpha_{01}X - \alpha_{10}Y + \alpha_{10}\alpha_{01}\big) = E(XY) - \alpha_{01}E(X) - \alpha_{10}E(Y) + \alpha_{10}\alpha_{01} =$$

$$= \alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} - \alpha_{10}\alpha_{01} + \alpha_{10}\alpha_{01} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{10}$$

- Si X e Y son dos variables aleatorias *independientes*, la covarianza $\mu_{11} = 0$

$$\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = E\big([X - E(X)].[Y - E(Y)]\big) = E\big([X - \alpha_{10}].[Y - \alpha_{01}]\big) =$$

$$= E\big(XY - \alpha_{01}X - \alpha_{10}Y + \alpha_{10}\alpha_{01}\big) = E(XY) - \alpha_{01}E(X) - \alpha_{10}E(Y) + \alpha_{10}\alpha_{01} =$$

$$= E(X).E(Y) - \alpha_{01}E(X) - \alpha_{10}E(Y) + \alpha_{10}\alpha_{01} = \alpha_{10}\alpha_{01} - \alpha_{01}\alpha_{10} - \alpha_{10}\alpha_{01} + \alpha_{10}\alpha_{01} = 0$$

Cuando dos variables aleatorias son independientes se deduce que su covarianza es cero. La inversa no es cierta, existen pares de variables dependientes que tienen covarianza cero. En resumen,

$$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ e } Y \text{ independientes} \Rightarrow \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \\ \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ independientes} \end{array}}$$

- Sean X e Y variables aleatorias, y sean también variables aleatorias aX y bY, siendo a, b números reales cualesquiera, se verifica:

$$\text{Cov}(aX, bY) = a.b.\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(aX, bY) = E\big([aX - E(aX)].[bY - E(bY)]\big) = E\big([aX - aE(X)].[bY - bE(Y)]\big) =$$

$$= E\big([aX - a\alpha_{10})].[bY - b\alpha_{01}]\big) =$$

$$= E\big[a.b.XY - a.b.\alpha_{01}.X - a.b.\alpha_{10}.Y + a.b.\alpha_{10}.\alpha_{01}\big] =$$

$$= a.b.E\big[XY - \alpha_{01}.X - \alpha_{10}.Y + \alpha_{10}.\alpha_{01}\big] =$$

$$= a.b.\big(E(XY) - \alpha_{01}.E(X) - \alpha_{10}.E(Y) + \alpha_{10}.\alpha_{01}\big) =$$

$$= a.b.\big(\alpha_{11} - \alpha_{01}.\alpha_{10} - \alpha_{10}.\alpha_{01} + \alpha_{10}.\alpha_{01}\big) = a.b.\big(\alpha_{11} - \alpha_{10}.\alpha_{01}\big) =$$

$$= a.b.\text{Cov}(X, Y)$$

- La covarianza μ_{11} conserva los cambios de escala y es invariante a los cambios de origen. La propiedad anterior es extensible al caso de tener variables aleatorias de la forma $(aX+c)$ y $(bY+d)$, teniendo en este caso:

$$\mathrm{Cov}(aX+b,\ bY+d) = a.b.\mathrm{Cov}(X, Y)$$

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) = \alpha_{11} - \alpha_{10}.\alpha_{01}$

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$

$$\mathrm{Cov}(X, X) = E\left(\left[X-\alpha_{10}\right].\left[X-\alpha_{10}\right]\right) = E\left[(X-\alpha_{10})^2\right] = \sigma_X^2$$

- $\mathrm{Cov}(X, k) = 0 \quad \forall k \in R$

- X, Y, Z son variables aleatorias: $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$

- $\begin{cases} X, Y \text{ variables aleatorias}: & \mathrm{Var}(X\pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) \\ X, Y \text{ variables aleatorias independientes}: & \mathrm{Var}(X\pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \end{cases}$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(X\pm Y) &= E\left(\left[(X\pm Y) - E(X\pm Y)\right]^2\right) = E\left[\left(\left[X-E(X)\right]\pm\left[Y-E(Y)\right]\right)^2\right] = \\ &= E\left[X-\alpha_{10}\right]^2 + E\left[Y-\alpha_{01}\right]^2 \pm 2E\left[(X-\alpha_{10})(Y-\alpha_{01})\right] = \\ &= \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}\,(X, Y) \end{aligned}$$

Si X e Y son independientes, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

Esta propiedad se puede generalizar, siendo $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ variables aleatorias cualesquiera, se tiene:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$$

- Sean $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ variables aleatorias cualesquiera y $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ números reales cualesquiera, entonces:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} k_i\, X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i^2\, \mathrm{Var}\,(X_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} k_i\, k_j\, \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

El coeficiente de correlación es un número abstracto (sin unidades) que determina la fuerza de la relación lineal entre las variables aleatorias, es decir, una medida numérica del grado en que las variables están relacionadas linealmente.

El coeficiente de correlación lineal ρ entre las variables aleatorias (X, Y) se define:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,.\,Var(Y)}} = \frac{E\big([X-E(X)].[Y-E(Y)]\big)}{\sigma_X\,.\,\sigma_Y} = E\left[\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Es decir, el coeficiente de correlación es el valor esperado de los valores tipificados o normalizados de X e Y.

- Si las variables X e Y son independientes, el coeficiente de correlación $\rho_{XY} = 0$

  Si X e Y son dos variables aleatorias independientes $\Rightarrow$ $\mu_{11} = \sigma_{XY} = 0$

  $$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,.\,Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,.\,\sigma_Y} = \frac{0}{\sigma_X\,.\,\sigma_Y} = 0$$

  Esta propiedad se puede generalizar para n variables aleatorias independientes $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, pues si son independientes lo son dos a dos.

  En consecuencia, la covarianza de dos cualesquiera será nula y el coeficiente de correlación es cero. Las variables estarán incorreladas dos a dos.

- Si las variables X e Y aleatorias tienen varianzas distintas de cero: $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

  $\rho_{XY} = 0 \mapsto$ No existe relación lineal entre las variables aleatorias X e Y, diciendo que están incorreladas.

  $\rho_{XY} = 1 \mapsto$ Existe relación lineal entre las variables aleatorias X e Y, dependencia funcional.

  $\rho_{XY} = -1 \mapsto$ Existe relación lineal entre las variables aleatorias X e Y, dependencia funcional.

  $\left\{\begin{array}{c} -1 < \rho_{XY} < 0 \\ o \\ 0 < \rho_{XY} < 1 \end{array}\right. \mapsto$ Existe mayor relación lineal en cuanto el coeficiente de correlación se aproxime, respectivamente, más a -1 ó a 1, es decir, estarán más correladas.

RESUMEN DE PROPIEDADES DE MOMENTOS SIGNIFICATIVOS

Sean X e Y variables aleatorias

Media o Esperanza matemática

- La media es un operador lineal:

$E(k) = k$

$\mu_{X+Y} = E[X+Y] = E(X) + E(Y)$

$\mu_{k+X} = E[k+X] = k + E(X)$

$\mu_{k.X} = E(k.X) = k.E(X)$

$\mu_{a.X+b.Y} = E[a.X+b.Y] = a.E(X) + b.E(Y)$

- Si X e Y independientes:

$\mu_{X.Y} = E[X.Y] = E(X).E(Y)$

Varianza

- La varianza no es un operador lineal:

$Var(k) = 0$

$\sigma^2_{X\pm Y} = Var[X \pm Y] = Var(X) + Var(Y) \pm 2\,Cov(X,Y)$

$\sigma^2_{k.X} = Var(k.X) = k^2.Var(X)$

- Si X e Y independientes:

$\sigma^2_{X\pm Y} = Var[X \pm Y] = Var(X) + Var(Y)$

Covarianza: $\mu_{11} = \mu_{XY} = \sigma_{XY} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\,.\,\alpha_{01}$

$Cov(X,X) = Var(X) = \sigma^2_x$

$Cov(a.X\,,\,b.Y) = a.b.Cov(X,Y)$

$Cov(X\,,\,k) = 0$

$Cov(X+Y,\,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

- Si X e Y independientes:

$Cov(X,Y) = 0$

Coeficiente de correlación: $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_X\,.\,\sigma_Y} = E\left[\left(\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\dfrac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$ $\qquad -1 \le \rho_{XY} \le 1$

- Si X e Y independientes: $\rho_{XY} = 0$

EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X ="número de caras en las tres tiradas" e Y ="diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de (X, Y)
b) Media y desviación típica de las distribuciones marginales de X e Y
c) Covarianza y coeficiente de correlación
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Distribución condicionada de X a $Y = 3$
f) Distribución condicionada de Y a $X = 2$
g) $P\left[X \le 1;\, Y > 0\right]$, $P\left[X \ge 2\right]$, $P\left[Y < 3\right]$

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega = \left\{(c,c,c),(c,c,e),(c,e,c),(e,c,c),(c,e,e),(e,c,e),(e,e,c),(e,e,e)\right\}$

$$\begin{array}{ll} X(c,c,c) = 3 & Y(c,c,c) = 3 \\ X(c,c,e) = X(c,e,c) = X(e,c,c) = 2 & Y(c,c,e) = Y(c,e,c) = Y(e,c,c) = 1 \\ X(c,e,e) = X(e,c,e) = X(e,e,c) = 1 & Y(c,e,e) = Y(e,c,e) = Y(e,e,c) = 1 \\ X(e,e,e) = 0 & Y(e,e,e) = 3 \end{array}$$

Distribución de probabilidad:

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Probabilidades marginales:

$$\sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet} = p_{1\bullet} + p_{2\bullet} + p_{3\bullet} + p_{4\bullet} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j} = p_{\bullet 1} + p_{\bullet 2} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1$$

Adviértase que la probabilidad conjunta:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = \left(0 + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} + 0\right) + \left(\frac{3}{8} + 0\right) + \left(0 + \frac{1}{8}\right) = 1$$

Siendo: $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = \sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j} = 1$. En general, $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j} = 1}$

b) Distribución marginal de la variable aleatoria X:

x_i	$p_{i\bullet}$	$x_i \, . \, p_{i\bullet}$	x_i^2	$x_i^2 \, . \, p_{i\bullet}$
0	1/8	0	0	0
1	3/8	3/8	1	3/8
2	3/8	6/8	4	12/8
3	1/8	3/8	9	9/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_X = E(X) = \alpha_{10} = \sum_{i=1}^{4} x_i \, . \, p_{i\bullet} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \alpha_{20} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \, . \, p_{i\bullet} = 3$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_x = \sqrt{0,75} = 0,866$$

- Distribución marginal de la variable aleatoria Y:

y_j	$p_{\bullet j}$	$y_j \, . \, p_{\bullet j}$	y_j^2	$y_j^2 \, . \, p_{\bullet j}$
1	6/8	6/8	1	6/8
3	2/8	6/8	9	18/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_Y = E(Y) = \alpha_{01} = \sum_{j=1}^{2} y_j \, . \, p_{\bullet j} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$$E(Y^2) = \alpha_{02} = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \, . \, p_{\bullet j} = 3$$

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_Y = \sqrt{0,75} = 0,866$$

c) Covarianza y coeficiente de correlación

- La covarianza se define: $\mu_{11} = \mu_{XY} = \sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \, . \, \alpha_{01}$

donde $\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} x_i \, . \, y_j \, . \, p_{ij}$

Así pues,

$$\alpha_{11} = \left(0.1.0 + 0.3.\frac{1}{8}\right) + \left(1.1.\frac{3}{8} + 1.3.0\right) + \left(2.1.\frac{3}{8} + 2.3.0\right) + \left(3.1.0 + 3.3.\frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8} = 2,25$$

con lo cual, $\mu_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \, . \, \alpha_{01} = 2,25 - 1,5 \, . \, 1,5 = 0$

Señalar que la covarianza $\mu_{XY} = Cov(X,Y)$ puede ser negativa, nula o positiva, siendo una medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y.

- El coeficiente de correlación lineal ρ_{XY} es un número abstracto (sin unidades) que determina el grado en que las variables (X, Y) están relacionadas linealmente.

Se define: $\boxed{\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_x \, . \, \sigma_Y}}$

con lo cual, $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_x . \sigma_Y} = \dfrac{0}{\sqrt{0,75} . \sqrt{0,75}} = 0$

Denotar que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$. Cuando $\rho_{XY} = 0$ no existe relación lineal entre las variables X e Y, diciendo que están incorreladas.

d) Para que X e Y sean independientes se tiene que verificar: $p_{ij} = p_{i\bullet} . p_{\bullet j} \quad \forall (x_i , y_j)$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	$p_{11} = 0$	$1/8$	$p_{1\bullet} = 1/8$
1	$3/8$	0	$3/8$
2	$3/8$	0	$3/8$
3	0	$1/8$	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1} = 6/8$	$2/8$	1

$p_{11} = 0 \neq \dfrac{1}{8} . \dfrac{6}{8} = p_{1\bullet} . p_{\bullet 1}$

Las variables X e Y NO son independientes

Señalar que cuando dos variables X e Y son independientes, es decir, cuando $p_{ij} = p_{i\bullet} . p_{\bullet j}$ $\forall (x_i , y_j)$, la covarianza es cero. El caso contrario no se verifica. Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{X e Y independientes} \Rightarrow \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \\ \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow \text{X e Y independientes} \end{array}}$$

e) Distribución condicionada de X a $Y = 3$: $P\left[X / Y = 3\right] = \dfrac{P\left[X \cap (Y = 3)\right]}{P(Y = 3)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	$1/8$	$1/8$
1	$3/8$	0	$3/8$
2	$3/8$	0	$3/8$
3	0	$1/8$	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$6/8$	$\boxed{2/8}$	1

X	$P(X / Y = 3)$
0	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
1	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
2	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
3	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
	1

En general, $\boxed{P\left[X / Y = y_j\right] = \dfrac{P\left[X \cap (Y = y_j)\right]}{P(Y = y_j)}}$

f) Distribución condicionada de Y a $X=2$: $P[Y/X=2]=\dfrac{P[Y\cap(X=2)]}{P(X=2)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	$\boxed{3/8}$
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Y	$P(Y/X=2)$
1	$\dfrac{3/8}{3/8}=1$
3	$\dfrac{0}{3/8}=0$
	1

En general, $\boxed{P[Y/X=x_i]=\dfrac{P[Y\cap(X=x_i)]}{P(X=x_i)}}$

g) $P[X\le 1;\,Y>0]$, $P[X\ge 2]$, $P[Y<3]$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

$$P[X\le 1;\,Y>0]=P[X=0\,;\;Y=1]+P[X=0\,;\;Y=3]+P[X=1;\;Y=1]+P[X=1;\;Y=3]=$$
$$=p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=0+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[X\ge 2]=P[X=2\,;\;Y=1]+P[X=2\,;\;Y=3]+P[X=3\,;\;Y=1]+P[X=3\,;\;Y=3]=$$
$$=p_{31}+p_{32}+p_{41}+p_{42}=\frac{3}{8}+0+0+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[Y<3]=P[X=0\,;\;Y=1]+P[X=1;\;Y=1]+P[X=2\,;\;Y=1]+P[X=3\,;\;Y=1]=$$
$$=p_{11}+p_{21}+p_{31}+p_{41}=0+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Ejercicio 2.- Sea una variable aleatoria bidimensional con distribución de probabilidad

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

Se pide:

a) ¿Son X e Y independientes?

b) Hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y

c) Hallar las probabilidades: $P[X \leq 2\,;\ Y > 0]$ $\quad P[X \geq 2]$ $\quad P[Y < 0]$

d) Hallar el coeficiente de correlación

Solución:

a) Para analizar si X e Y son independientes hay que hallar las distribuciones marginales de X e Y, y ver si verifica que $p_{ij} = p_{i\bullet} \,.\, p_{\bullet j} \quad \forall (x_i, y_j)$

X \ Y	-1	1	$p_{i\bullet}$
1	$1/6$	$1/3$	$1/2$
2	$1/12$	$1/4$	$1/3$
3	$1/12$	$1/12$	$1/6$
$p_{\bullet j}$	$1/3$	$2/3$	1

$$p_{11} = \frac{1}{6} = p_{1\bullet} \,.\, p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} \qquad p_{12} = \frac{1}{3} = p_{1\bullet} \,.\, p_{\bullet 2} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}$$

$$p_{21} = \frac{1}{12} \neq p_{2\bullet} \,.\, p_{\bullet 1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad p_{22} = \frac{1}{4} \neq p_{2\bullet} \,.\, p_{\bullet 2} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p_{31} = \frac{1}{12} \neq p_{3\bullet} \,.\, p_{\bullet 1} = \frac{1}{6}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \qquad p_{32} = \frac{1}{12} \neq p_{3\bullet} \,.\, p_{\bullet 2} = \frac{1}{6}.\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Luego las variables X e Y no son independientes.

b) Para hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y hay que considerar las distribuciones marginales:

- Distribución marginal de la de la variable aleatoria X

$X = x_i$	$p_{i\bullet}$	$x_i \cdot p_{i\bullet}$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_{i\bullet}$
1	1/2	1/2	1	1/2
2	1/3	2/3	4	4/3
3	1/6	3/6	9	9/6
	1	10/6		20/6

Media: $\alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_{i\bullet} = \frac{10}{6}$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_{i\bullet} = \frac{20}{6}$$

Varianza: $\mu_{20} = \sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{20}{6} - \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0,745$

- Distribución marginal de la variable aleatoria Y

$Y = y_j$	$p_{\bullet j}$	$y_j \cdot p_{\bullet j}$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_{\bullet j}$
−1	1/3	−1/3	1	1/3
1	2/3	2/3	1	2/3
	1	1/3		1

Media: $\alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{2} y_j \cdot p_{\bullet j} = \frac{1}{3}$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \cdot p_{\bullet j} = 1$$

Varianza: $\mu_{02} = \sigma_Y^2 = Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,943$

c) Probabilidades: $P[X \le 2 \,;\; Y > 0]$ $\quad P[X \ge 2]$ $\quad P[Y < 0]$

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

$$P\left[X \leq 2\,;\ Y > 0\right] = P\left[X = 1;\ Y = 1\right] + P\left[X = 2\,;\ Y = 1\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P\left[X \geq 2\right] = P\left[X = 2\,;\ Y = -1\right] + P\left[X = 2\,;\ Y = 1\right] + P\left[X = 3\,;\ Y = -1\right] + P\left[X = 3\,;\ Y = 1\right] =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P\left[Y < 0\right] = P\left[X = 1;\ Y = -1\right] + P\left[X = 2\,;\ Y = -1\right] + P\left[X = 3\,;\ Y = -1\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

d) Coeficiente de correlación

X \ Y	-1	1	$x_i \,.\, y_j \,.\, p_{ij}$: -1	$x_i \,.\, y_j \,.\, p_{ij}$: 1	
1	$1/6$	$1/3$	$-1/6$	$1/3$	
2	$1/12$	$1/4$	$-2/12$	$2/4$	
3	$1/12$	$1/12$	$-3/12$	$3/12$	
			$-7/12$	$13/12$	$6/12$

$$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i \,.\, y_j \,.\, p_{ij} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Covarianza: $\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \,.\, \alpha_{01} = \frac{1}{2} - \frac{10}{6} \,.\, \frac{1}{3} = -\frac{1}{18} = -0{,}555$

Coeficiente de correlación: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \,.\, \sigma_Y} = \frac{-\,0{,}555}{0{,}745 \,.\, 0{,}943} = -0{,}79$

Siendo $\rho_{XY} = -0{,}79$, valor cercano a -1, existe una fuerte relación lineal entre las variables X e Y.

Ejercicio 3.- Sean (X, Y) los paquetes diarios que venden dos operadores de viajes, cuya distribución de probabilidad conjunta se refleja en la tabla:

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

Hallar la media, varianza y desviación típica de las variables: X, Y, $X+Y$, $X-Y$

Solución:

X \ Y	0	1	2	$p_{i\bullet}$	$x_i \cdot p_{i\bullet}$	$x_i^2 \cdot p_{i\bullet}$
0	0,15	0,15	0,10	0,40	0	0
1	0,05	0,20	0,05	0,30	0,30	0,30
2	0,10	0,05	0,15	0,30	0,60	1,20
$p_{\bullet j}$	0,30	0,40	0,30	1	0,90	1,50
$y_j \cdot p_{\bullet j}$	0	0,40	0,60	1		
$y_j^2 \cdot p_{\bullet j}$	0	0,40	1,20	1,60		

- Distribución marginal de la variable X:

Media: $\alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_{i\bullet} = 0,9$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_{i\bullet} = 1,5$$

Varianza: $\mu_{20} = \sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 1,5 - 0,9^2 = 0,69$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{0,69} = 0,83$

- Distribución marginal de la variable Y:

Media: $\alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot p_{\bullet j} = 1$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 \cdot p_{\bullet j} = 1,6$$

Varianza: $\mu_{02} = \sigma_Y^2 = Var(Y) = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 1,6 - 1^2 = 0,6$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{0,6} = 0,77$

- Distribución de la variable $(X+Y)$:

Media: $\mu_{X+Y} = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,9 + 1 = 1,9$

📖 Se tiene: $\mu_{X+Y} = E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i + y_j).p_{ij}$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$\mu_{X+Y} = 0\,.\,0,15 + 1\,.\,0,15 + 2\,.\,0,10 +$
$1\,.\,0,05 + 2\,.\,0,20 + 3\,.\,0,05 +$
$2\,.\,0,10 + 3\,.\,0,05 + 4\,.\,0,15 = 1,9$

Varianza: $\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$ X e Y no independientes

X \ Y	0	1	2	$x_i.y_j.p_{ij}$ 0	1	2	
0	0,15	0,15	0,10	0	0	0	
1	0,05	0,20	0,05	0	0,20	0,10	
2	0,10	0,05	0,15	0	0,10	0,60	
				0	0,30	0,7	1

$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i.y_j.p_{ij} = 1$

Covarianza: $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10}.\alpha_{01} = 1 - 0,9.1 = 0,1$

$\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) = 0,69 + 0,6 + 2.0,1 = 1,49$

📖 Se tiene: $\sigma^2_{X+Y} = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$E\left[(X+Y)^2\right] = 0\,.\,0,15 + 1\,.\,0,15 + 4\,.\,0,10 +$
$1\,.\,0,05 + 4\,.\,0,20 + 9\,.\,0,05 +$
$4\,.\,0,10 + 9\,.\,0,05 + 16\,.\,0,15 = 5,1$

$\sigma^2_{X+Y} = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2 = 5,1 - 1,9^2 = 1,49 \quad \mapsto \quad \sigma_{X+Y} = \sqrt{1,49} = 1,22$

- Distribución de la variable $(X-Y)$:

Media: $\mu_{X-Y} = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0,9 - 1 = -0,1$

$\sigma^2_{X-Y} = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y) = 0,69 + 0,6 - 2.0,1 = 1,09$

Ejercicio 4.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Hallar k para que sea función de densidad

b) Hallar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?

c) Hallar las funciones de distribución marginales

d) Hallar las funciones de densidad condicionadas

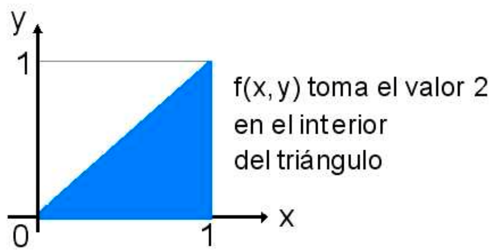
Solución:

a) Para que $f(x,y)$ sea función de densidad tiene que verificarse: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_0^x k\,dx\,dy = \int_0^1 k\left(\int_0^x dy\right)dx = \int_0^1 k\,[y]_0^x\,dx = k\int_0^1 x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \quad \mapsto \quad k = 2$$

por tanto,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$



b) Funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 2\,dy = 2[y]_0^x = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^1 2\,dx = 2[x]_y^1 = 2 - 2y \qquad 0 < y < 1$$

X e Y son independientes cuando $f(x,y) = f_1(x)\,.\,f_2(y)$

$f_1(x)\,.\,f_2(y) = 2x\,.(2-2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x,y)$ luego no son independientes

c) Funciones de distribución marginales:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2 \qquad 0 < x < 1$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)\,dt = \int_0^y f_2(t)\,dt = \int_0^y (2-2t)\,dt = \left[2t - t^2\right]_0^y = 2y - y^2 \qquad 0 < y < 1$$

d) Funciones de densidad condicionadas:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{2}{2-2y} \qquad 0<y<1 \qquad 0<x<1$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{2}{2x} \qquad 0<x<1 \qquad 0<y<1$$

Ejercicio 5.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & |y|<x \ ; \ 0<x<1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Comprobar que $f(x,y)$ es función de densidad

b) Hallar las medias de X e Y

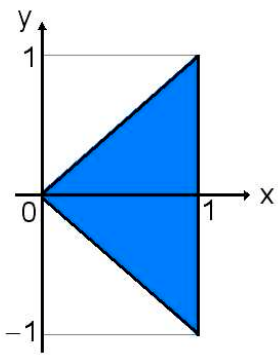
c) Hallar las probabilidades: $P\left[X<\frac{1}{2} \ ; \ Y<0\right]$ y $P\left[X>\frac{1}{2} \ ; \ -\frac{1}{2}<Y<\frac{1}{2}\right]$

Solución:

a) $f(x,y)$ es función de densidad si se verifica: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-x}^{x} dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-x}^{x} dy\right)dx=\int_0^1 [y]_{-x}^{x}\,dx=\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1$$

en consecuencia, $f(x,y)$ es función de densidad.



b) Para hallar las medias de X e Y hay que calcular primero las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-x}^{x} dy=[y]_{0-x}^{x}=2x \qquad 0<x<1$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_{-y}^{1} dx=[x]_{-y}^{1}=1+y & -1<y<0 \\ \int_{y}^{1} dx=[x]_{y}^{1}=1-y & 0<y<1 \end{cases}$$

$$\alpha_{10} = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx = \int_0^1 x\,.\,2x\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{01} = \mu_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy = \int_{-1}^{0} y\, f_2(y)\, dy + \int_0^1 y\, f_2(y)\, dy = \int_{-1}^{0} y\,(1+y)\, dy + \int_0^1 y\,(1-y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} (y+y^2)\, dy + \int_0^1 (y-y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 0$$

c) Probabilidades: $P\left[X < \frac{1}{2}\ ;\ Y < 0\right]$ y $P\left[X > \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right]$

$$P\left[X < \frac{1}{2}\ ;\ Y < 0\right] = \int_0^{1/2}\int_{-x}^{0} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{1/2}\left(\int_{-x}^{0} dy\right) dx = \int_0^{1/2} [y]_{-x}^{0}\, dx = \int_0^{1/2} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

$$P\left[X > \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right] = \int_{1/2}^{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{-1/2}^{1/2} dy\right) dx = \int_0^{1/2} [y]_{-1/2}^{1/2}\, dx = \int_{1/2}^{1} dx = [x]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6.- La función de densidad asociada a la emisión de billetes de una compañía área es:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución

b) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

Solución:

a) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv\, du = \int_0^x\int_0^y (u+v)\, du\, dv = \int_0^x\left(\int_0^y (u+v)\, dv\right) du = \int_0^x\left(u\,[v]_0^y + \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^y\right) du =$$

$$= \int_0^x \left[u\,y + \frac{y^2}{2}\right] du = y\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x + \frac{y^2}{2}\,[u]_0^x + = \frac{y\,x^2}{2} + \frac{y^2\,x}{2} = \frac{1}{2}(y\,x^2 + y^2\,x) \qquad 0 \le x < 1 \quad 0 \le y < 1$$

En consecuencia,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \ \text{ ó } \ y<0 \\ \frac{1}{2}(y\,x^2 + y^2\,x) & 0 \le x < 1 \quad 0 \le y < 1 \\ F_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \le x < 1\ ,\ y \ge 1 \\ F_2(y) = \frac{1}{2}(y + y^2) & 0 \le y < 1\ ,\ x \ge 1 \\ 1 & x \ge 1\ ,\ y \ge 1 \end{cases}$$

Funciones de densidad marginales de X e Y

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+y)\,dy = x\left[y\right]_0^1+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x+\frac{1}{2} \qquad 0<x<1$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^1 (x+y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+y\left[x\right]_0^1 = \frac{1}{2}+y \qquad 0<y<1$$

Adviértase que:

$$f_1(x)=\frac{\vartheta F_1(x)}{\vartheta x}=\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left[\frac{1}{2}(x^2+x)\right]=x+\frac{1}{2} \qquad f_2(y)=\frac{\vartheta F_2(y)}{\vartheta y}=\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[\frac{1}{2}(y+y^2)\right]=\frac{1}{2}+y$$

a) X e Y son independientes cuando se verifica $f(x,y)=f_1(x)\,.\,f_2(y)$

$$f_1(x)\,.\,f_2(y)=\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}+y\right)\neq x+y=f(x,y)$$

luego no son independientes.

Ejercicio 7.- La función de distribución asociada a un fenómeno de la naturaleza es:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})\,.\,(1-e^{-y}) & x>0\ ,\quad y>0\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Hallar la función de densidad
b) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y
c) Hallar las funciones de densidad condicionadas
d) Calcular el coeficiente de correlación

Solución:

a) $$f(x,y)=\frac{\vartheta^2 F(x,y)}{\vartheta x\ \vartheta y}=\frac{\theta}{\vartheta y}\left[\frac{\vartheta F(x,y)}{\vartheta x}\right]=\frac{\theta}{\vartheta y}\left[\frac{\vartheta\big((1-e^{-x})\,.\,(1-e^{-y})\big)}{\vartheta x}\right]=\frac{\theta}{\vartheta y}\left[(1-e^{-y})\frac{\vartheta(1-e^{-x})}{\vartheta x}\right]=$$

$$=\frac{\theta}{\vartheta y}\left[(1-e^{-y})\,.\,e^{-x}\right]=e^{-x}\,.\,\frac{\vartheta(1-e^{-y})}{\vartheta y}=e^{-x}\,.\,e^{-y}=e^{-(x+y)}=\frac{1}{e^{x+y}} \qquad x>0\ ,\ y>0$$

Función de densidad $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0 \quad y>0\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

b) Funciones de densidad marginales

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy = \int_0^{\infty} e^{-x}\,.\,e^{-y}\,dy = e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = -e^{-x}\left[e^{-y}\right]_0^{\infty} = -e^{-x}\,.(-1) = e^{-x}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-y}\,.\,e^{-x}\,dx = e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-y}\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -e^{-y}\,.(-1) = e^{-y}$$

Adviértase que X e Y son independientes al verificarse $f(x,y) = f_1(x)\,.\,f_2(y)$

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = f_1(x)\,.\,f_2(y) = e^{-x}\,.\,e^{-y}$$

X e Y **independientes** $\Rightarrow$ La covarianza $\boldsymbol{\mu_{11} = \sigma_{xy} = 0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\rho = 0}$

c) Funciones de densidad condicionadas

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} = e^{-x} = f_1(x) \quad \text{al ser X e Y independientes}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y} = f_2(y) \quad \text{al ser X e Y independientes}$$

d) El coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{xy} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_x\,.\,\sigma_y}$

$$\alpha_{10} = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f_1(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,.\,e^{-x}\,dx \doteq \left[-x\,.\,e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \left[-x\,.\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\alpha_{01} = \mu_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,.\,f_2(y)\,dy = \int_0^{\infty} y\,.\,e^{-y}\,dy \doteq \left[-y\,.\,e^{-y}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = \left[-y\,.\,e^{-y} - e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

Nota: $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,.\,e^{-x}\,dx = \left[x\,.\,e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[x\,.\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\infty}$

donde se ha realizado el cambio $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx & v = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} \end{cases}$

$$\alpha_{11} = E(X\,.\,Y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\,.\,y\,.\,f(x,y)\;dx\;dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\,.\,y\,.\,e^{-(x+y)}\;dx\;dy = \int_0^{\infty} x\,.\,e^{-x}\,dx\;.\;\int_0^{\infty} y\,.\,e^{-y}\,dy = 1$$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,.\,f_1(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2\,.\,e^{-x}\,dx \doteq \left[-x^2\,.\,e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2\,.\,x\,.\,e^{-x}dx =$$

$$= \left[-x^2\,.\,e^{-x}\right]_0^{\infty} + 2\left[-x\,.\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\infty} = \left[-x^2\,.\,e^{-x} - 2\,.\,x\,.\,e^{-x} - 2\,.\,e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2$$

Análogamente, $\alpha_{02} = E(Y^2) = 2$

$\sigma_x^2 = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 2-1=1 \qquad \sigma_x = \sqrt{1} = 1$

$\sigma_y^2 = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 2-1=1 \qquad \sigma_y = \sqrt{1} = 1$

covarianza: $\mu_{11} = \sigma_{xy} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\,.\,\alpha_{01} = 1-1.1 = 0$

coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{xy} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_x\,.\,\sigma_y} = \dfrac{0}{1.1} = 0 \quad \Rightarrow$ Las variables son incorreladas

Ejercicio 8.- La venta en un mercado de abastos lleva asociada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left[\dfrac{x\,y}{2} + 1\right] & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar k para que sea función de densidad

b) Hallar la función de distribución

c) Funciones de densidad marginales y condicionadas

d) Se considera la transformación $Z = X - Y$ y $T = X + 2Y$, hallar la función de densidad de la variable (Z,T)

Solución:

a) $\quad f(x,y) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; k \geq 0$

Para que $f(x,y)$ sea función de densidad debe verificarse que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_{-1}^1 k\left[\frac{x\,y}{2}+1\right]dx\,dy = \int_0^1 k\left(\int_{-1}^1\left[\frac{x\,y}{2}+1\right]dy\right)dx = \int_0^1 k\left(x\left[\frac{y^2}{4}\right]_{-1}^1 + [y]_{-1}^1\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2k\,dx = 2k\,[x]_0^1 = 2k = 1 \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{2}$$

La función de densidad $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y+2}{4} & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) Función de distribución $F(x,y) = P(X \leq x,\, Y \leq y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$

$$F(x,y) = \int_0^x\int_{-1}^y\left[\frac{u\,v+2}{4}\right]dv\,du = \int_0^x\left(\int_{-1}^y\left[\frac{u\,v+2}{4}\right]dv\right)du = \frac{1}{4}\int_0^x\int_{-1}^y\big([u\,v+2]\,dv\big)du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x \left(u\left[\frac{v^2}{2}\right]_{-1}^{y} + 2\left[v\right]_{-1}^{y} \right) du = \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{u\,y^2}{2} - \frac{u}{2} + 2\,y + 2 \right) du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^x - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^x + 2\,y\left(u\right)_0^x + 2\left(u\right)_0^x \right] = \frac{x^2(y^2-1)}{16} + \frac{x\,(y+1)}{2}$$

En consecuencia, $F(x,y) = \dfrac{x^2(y^2-1)}{16} + \dfrac{x\,(y+1)}{2} \qquad 0 \le x < 1 \quad -1 \le y < 1$

- Las funciones de distribución marginales, resultan:

$$F_1(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_{-1}^{1} \frac{u\,v+2}{4}\,dv\,du = \int_0^x \left(\int_{-1}^{1} \frac{u\,v+2}{4}\,dv \right) du =$$

$$= \int_0^x \left(u\left[\frac{v^2}{8}\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{4}\left[v\right]_{-1}^{1} \right) du = \int_o^x du = \left[u\right]_0^x = x \quad 0 \le x < 1$$

$$F_2(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^1\int_{-1}^{y} \frac{u\,v+2}{4}\,dv\,du = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{y} \frac{u\,v+2}{4}\,dv \right) du =$$

$$= \int_0^1 \left(u\left[\frac{v^2}{8}\right]_{-1}^{y} + \frac{2}{4}\left[v\right]_{-1}^{y} \right) du = \int_0^1 \left[\left(\frac{y^2-1}{8}\right) u + \frac{2}{4}\left(y+1\right) \right] du = \left(\frac{y^2-1}{8}\right)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{4}\left(y+1\right)\left[u\right]_0^1 =$$

$$= \frac{y^2-1}{16} + \frac{y+1}{2} = \frac{y^2+8\,y+7}{16} \qquad -1 \le y < 1$$

También se podrían haber hallado a través de las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x\,y}{4} + \frac{1}{2} \right] dy = \frac{x}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[y\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{1} \left[\frac{x\,y}{4} + \frac{1}{2} \right] dx = \frac{y}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} + \frac{1}{2}\left[x\right]_{0}^{1} = \frac{y+4}{8}$$

$$F_1(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du = \int_0^x du = \left[u\right]_0^x = x \qquad 0 \le x < 1$$

$$F_2(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv = \int_{-1}^{y} \left[\frac{v+4}{8} \right] dv = \frac{1}{8}\left[\frac{v^2}{2} + 4\,v \right]_{-1}^{y} = \frac{y^2+8\,y+7}{16} \qquad -1 \le y < 1$$

La función de distribución conjunta:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \quad ó \quad y<-1 \\ \dfrac{x^2(y^2-1)}{16}+\dfrac{x(y+1)}{2} & 0\le x<1 \quad -1\le y<1 \\ x & 0\le x<1\ ,\ y\ge 1 \\ \dfrac{y^2+8y+7}{16} & -1\le y<1\ ,\ x\ge 1 \\ 1 & x\ge 1\ ,\ y\ge 1 \end{cases}$$

c) Las funciones de densidad marginales se pueden hallar a partir de la función de distribución conjunta:

$$f_1(x)=\frac{\vartheta F_1(x)}{\vartheta x}=\frac{\vartheta}{\vartheta x}(x)=1 \qquad f_2(y)=\frac{\vartheta F_2(y)}{\vartheta y}=\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[\frac{y^2+8y+7}{16}\right]=\frac{y+4}{8}$$

o bien, a partir de la función de densidad:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{xy}{4}+\frac{1}{2}\right]dy=\frac{x}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\left[y\right]_{-1}^{1}=1$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_{0}^{1}\left[\frac{xy}{4}+\frac{1}{2}\right]dx=\frac{y}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\frac{1}{2}\left[x\right]_{0}^{1}=\frac{y+4}{8}$$

- Funciones de densidad condicionadas:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{(xy+2)/4}{1}=\frac{xy+2}{4}\neq f_2(y)$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{(xy+2)/4}{(y+4)/8}=\frac{2xy+4}{y+4}\neq f_1(x)$$

Las variables X e Y no son independientes al ser $f(x,y)\neq f_1(x).f_2(y)$

d) En la transformación $\begin{cases} Z=X-Y \\ T=X+2Y \end{cases}$ $\quad J=\dfrac{\vartheta(z,t)}{\vartheta(x,y)}==\begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta z}{\vartheta x} & \dfrac{\vartheta z}{\vartheta y} \\ \dfrac{\vartheta t}{\vartheta x} & \dfrac{\vartheta t}{\vartheta y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$

por lo que existe la función de densidad $g(z,t)$

Despejando (X,Y) en la función de (Z,T) se calcula el jacobiano $J_1=\dfrac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(z,t)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta z} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta t} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta z} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta t} \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} Z=X-Y \\ T=X+2Y \end{cases} \mapsto \begin{matrix} 2Z=2X-2Y \\ T=\ \ X\ +2Y \end{matrix} \mapsto \begin{cases} X=\dfrac{2Z+T}{3} \\ Y=\dfrac{-Z+T}{3} \end{cases} \qquad J_1=\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(z,t)}=\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

La función de densidad $g(z,t) = f\left[h_1(z,t),\, h_2(z,t)\right].\, |J_1|$

$$h_1(z,t) = \frac{2z+t}{3} \quad , \quad h_2(z,t) = \frac{-z+t}{3} \quad , \quad \begin{cases} 0 < x < 1 & \mapsto \quad 0 < 2z+t < 3 \\ -1 < y < 1 & \mapsto \quad -3 < -z+t < 3 \end{cases}$$

$$g(z,t) = \frac{\left[\dfrac{2z+t}{3}\right]\left[\dfrac{-z+t}{3}\right]}{4} \cdot \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{(2z+t)(-z+t)}{108}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+2}{4} & \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad g(z,t) = \begin{cases} \dfrac{(2z+t)(-z+t)}{108} & \begin{matrix} 0 < 2z+t < 3 \\ -3 < -z+t < 3 \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio 9.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad

$$p_{ij} = \begin{cases} c\,|x_i + y_j| & x_i = -2, -1, 0, 1, 2 \ , \ y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante c

b) $P\left[X = 0,\, Y = 2\right]$

c) $P\left[X = 1\right]$

d) $P\left[|X - Y| \leq 1\right]$

Solución:

a) Para determinar el valor de la constante c se elabora la tabla, siendo $p_{ij} = c\,|x_i + y_j|$

X \ Y	-2	-1	0	1	2	$p_{i\bullet}$
-2	4c	3c	2c	c	0	10c
-1	3c	2c	c	0	c	7c
0	2c	c	0	c	2c	6c
1	c	0	c	2c	3c	7c
2	0	c	2c	3c	4c	10c
$p_{\bullet j}$	10c	7c	6c	7c	10c	40c

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} p_{ij} = 40c = 1 \quad \mapsto \quad c = \frac{1}{40} \quad \mapsto \quad p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{40}|x_i + y_j| & \begin{cases} x_i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P\left[X = 0,\, Y = 2\right] = \dfrac{1}{40}|0 + 2| = \dfrac{1}{20}$

c) $P\left[X=1\right]=7c=\dfrac{7}{40}$

d) $P\left[\left|X-Y\right|\le 1\right]\overset{\text{zona sombreada}}{=}28c=\dfrac{28}{40}=\dfrac{7}{10}$

$$\begin{aligned}P\left[\left|X-Y\right|\le 1\right]&=P\left[X=-2,Y=-2\right]+P\left[X=-2,Y=-1\right]+\\&+P\left[X=-1,Y=-2\right]+P\left[X=-1,Y=-1\right]+P\left[X=-1,Y=0\right]+\\&+P\left[X=0,Y=-1\right]+P\left[X=0,Y=0\right]+P\left[X=0,Y=1\right]+\\&+P\left[X=1,Y=0\right]+P\left[X=1,Y=1\right]+P\left[X=1,Y=2\right]+\\&+P\left[X=2,Y=1\right]+P\left[X=2,Y=2\right]=28c=28/40=7/10\end{aligned}$$

Ejercicio 10.- Sean (X,Y) dos variables aleatorias independientes, cada una con la función de densidad:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\qquad\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria $X+Y$

Solución:

Por ser variables aleatorias independientes, la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional $X+Y$ es:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y} & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

La transformación a aplicar es $\begin{cases}U=X+Y\\ V=X\end{cases}$ siendo $x>0$ e $y>0$ $\mapsto\begin{cases}u>0\\ v>0\end{cases}$ $u>v$

Despejando (X,Y) en la función de (U,V) se calcula el jacobiano $J_1=\dfrac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vartheta x}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta v}\\[2mm] \dfrac{\vartheta y}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta v}\end{vmatrix}$

$$\begin{cases}U=X+Y\\ V=X\end{cases}\mapsto\begin{cases}X=V\\ Y=\ U-V\end{cases}\qquad J_1=\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

Función de densidad de la transformación $\left[h_1(u,v)=v\ \ ;\ h_2(u,v)=u-v\right]$:

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\left[h_1(u,v),\,h_2(u,v)\right].\left|J_1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right].\left|J_1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right].\left|-1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right]$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v\,,\,u-v) = \begin{cases} e^{-v-(u-v)} = e^{-u} & u>0\,,\,v>0\,\,,\,u>v \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Como se quiere obtener la función de densidad de la variable aleatoria $U = X + Y$, se calcula la función de densidad marginal de U:

$$f_U(u) = \int_0^u f_{U,V}\,dv = \int_0^u e^{-u}\,dv = e^{-u}\left[v\right]_0^u = u\,.\,e^{-u} \qquad f_U(u) = \begin{cases} u\,.\,e^{-u} & u>0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 11.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con densidad uniforme en el cuadrante unitario $\left[0,1\right]x\left[0,1\right]$. Calcular la función de densidad conjunta $U = X + Y$ y $V = X - Y$

Solución:

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = X-Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = \dfrac{U+V}{2} \\ Y = \dfrac{U-V}{2} \end{cases} \qquad \text{El jacobiano } J_1 = \frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

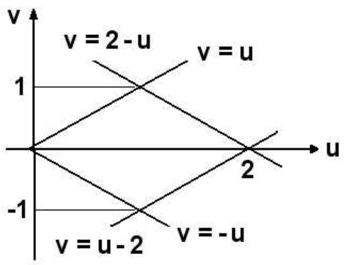
Función de densidad de la transformación $\left[h_1(u,v) = (u+v)/2\ \ ;\ \ h_2(u,v) = (u-v)/2\right]$:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left[h_1(u,v),\,h_2(u,v)\right].\,\left|J_1\right| = f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\,\left|J_1\right| = f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\,\left|-\frac{1}{2}\right| =$$

$$= f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dominio para las variables X e Y: $\begin{cases} X = \dfrac{u+v}{2} \in \left[0,1\right] \\ Y = \dfrac{u-v}{2} \in \left[0,1\right] \end{cases} \mapsto \begin{cases} 0 \le u+v \le 2 \\ 0 \le u-v \le 2 \end{cases}$

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 \le u \le 2\ \ ;\ \ -1 \le v \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Ejercicio 12.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y & x^2\le y\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Calcular:

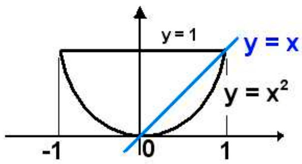
a) El valor de la constante c

b) $P[X\ge Y]$

c) Función de distribución conjunta

Solución:

a) Para el cálculo de la constante c se procede:



$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}\left[cx^2y\right]dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{cx^2y^2}{2}\Bigg|_{y=x^2}^{y=1}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{cx^2}{2}-\frac{cx^6}{2}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{cx^3}{6}-\frac{cx^7}{14}\right]_{x=-1}^{x=1}=\frac{c}{6}-\frac{c}{14}-\left[-\frac{c}{6}+\frac{c}{14}\right]=\frac{4c}{21}\quad\mapsto\quad c=\frac{21}{4}$$

con lo cual, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

b) $$P[X\ge Y]=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2y\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{21x^2y^2}{8}\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\right)dx=\int_0^1\left[\frac{21x^4}{8}-\frac{21x^6}{8}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{21x^5}{40}-\frac{21x^7}{56}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{21}{40}-\frac{21}{56}=\frac{42}{280}=\frac{21}{140}$$

c) $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

- $-1\le x<1,\ 0\le y<1$

$$F(x,y)=\int_{u=-1}^{u=x}\left(\int_{v=u^2}^{v=y}\frac{21}{4}u^2\,v\,dv\right)du=\int_{-1}^{x}\left[\frac{21\,u^2\,v^2}{8}\right]_{v=u^2}^{v=y}du=\int_{-1}^{x}\left[\frac{21\,u^2\,y^2}{8}-\frac{21\,u^6}{8}\right]du=$$

$$=\left[\frac{21\,u^3\,y^2}{24}-\frac{21\,u^7}{56}\right]_{u=-1}^{u=x}=\left[\frac{7\,u^3\,y^2}{8}-\frac{3\,u^7}{8}\right]_{u=-1}^{u=x}=\left[\frac{7\,x^3\,y^2}{8}-\frac{3\,x^7}{8}\right]-\left[-\frac{7\,y^2}{8}+\frac{3}{8}\right]=$$

$$=\frac{7}{8}x^3\,y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}y^2-\frac{3}{8}$$

- $-1\le x<1,\ y\ge 1$

$$F(x,y)=\int_{u=-1}^{u=x}\left(\int_{v=u^2}^{v=1}\frac{21}{4}u^2\,v\,dv\right)du=\left[\frac{7}{8}x^3\,y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}y^2-\frac{3}{8}\right]_{y=1}=\frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}$$

- $x\ge 1,\ 0\le y<1$

$$F(x,y)=\int_{u=-1}^{u=1}\left(\int_{v=u^2}^{v=y}\frac{21}{4}u^2\,v\,dv\right)du=\left[\frac{7}{8}x^3\,y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}y^2-\frac{3}{8}\right]_{x=1}=\frac{7}{4}y^2-\frac{3}{4}$$

- $x\ge 1,\ y\ge 1$

$$F(x,y)=\int_{u=-1}^{u=1}\left(\int_{v=u^2}^{v=1}\frac{21}{4}u^2\,v\,dv\right)du=\left[\frac{7}{8}x^3\,y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}y^2-\frac{3}{8}\right]_{x=1,\ y=1}=1$$

En consecuencia,

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0 & y<0\\ \frac{7}{8}x^3\,y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}y^2-\frac{3}{8} & -1\le x<1,\ 0\le y<1\\ \frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2} & -1\le x<1,\ y\ge 1\\ \frac{7}{4}y^2-\frac{3}{4} & x\ge 1,\ 0\le y<1\\ 1 & x\ge 1,\ y\ge 1\end{cases}$$

Ejercicio 13.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de distribución

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\,,\ y\leq 0 \\ xy & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ x & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ y & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 1 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad conjunta de la v.a. bidimensional (X,Y)

Solución:

a)

$$\frac{\vartheta F(x,y)}{\vartheta x}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\,,\ y\leq 0 \\ y & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 1 & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases} \qquad f(x,y)=\frac{\vartheta^2 F(x,y)}{\vartheta x\,\vartheta y}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\,,\ y\leq 0 \\ 1 & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases}$$

Por consiguiente, $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$