



PORTAL ESTADÍSTICA APLICADA



Video
Contrastes



Algebra
Lineal



Decisiones
en Bolsa



Matrices
Determinantes



Métodos
Integración



Ecuaciones
Diferenciales

PAU MATEMÁTICAS

Destrezas
Matemáticas



Estadística
Probabilidad



Programación
Lineal



Matrices
Determinantes



Análisis
Matemático



Geometría



Sistema
Ecuaciones

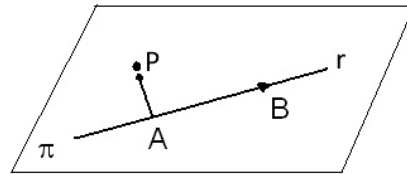
GEOMETRÍA

1. Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ y el punto $P(1, 0, 1)$ exterior a r :

- Hallar la ecuación en forma general del plano π que contiene a r y a P
- Hallar la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta s que pasa por P y es paralela a la recta r

Solución:

a) Dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$



$$y = 0 \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + z = 2 \end{cases} \mapsto z = 1, x = -1 \Rightarrow A(-1, 0, 1)$$

$$x = 1 \begin{cases} -2y + z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \mapsto z = 1, y = 1 \Rightarrow B(1, 1, 1)$$

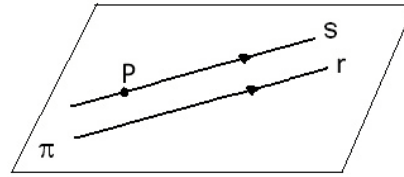
Se tienen los vectores directores $\overline{AB} = (2, 1, 0)$ y $\overline{AP} = (2, 0, 0)$

La ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, 0, 1)$ con vectores $\overline{AB} = (2, 1, 0)$ y $\overline{AP} = (2, 0, 0)$ será:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv z-1=0$$

b) s es paralela a r: $\vec{u}_s = \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$



$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0} \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{0} \end{cases} \mapsto s \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

2. Dada la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos P(1, -2, 0) y Q(0, 1, 3):

- a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a PQ
 b) Hallar la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por Q e interseca a r

Solución:

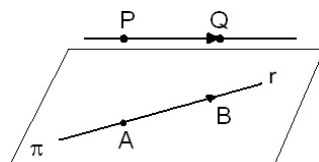
a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$$z=0 \begin{cases} x-2y=0 \\ x=0 \end{cases} \mapsto x=0, y=0 \Rightarrow A(0, 0, 0)$$

$$y=1 \begin{cases} x+z=2 \\ x-z=0 \end{cases} \mapsto x=1, z=1 \Rightarrow B(1, 1, 1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A(0, 0, 0) con vector director $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



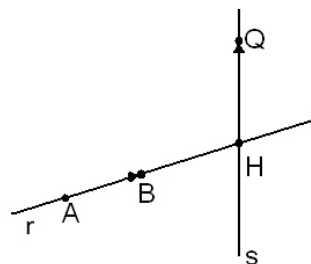
La ecuación implícita del plano que pasa por el punto $A(0, 0, 0)$ con vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, 3)$ será:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -y + z = 0$$

b) Sea $H = r \cap s$

Como $H \in r$ se tiene $(x, y, z) = (\mu, \mu, \mu)$

$$\overrightarrow{HQ} = (-\mu, 1 - \mu, 3 - \mu)$$



Siendo $r \perp s \mapsto \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HQ} \mapsto (1, 1, 1) \cdot (-\mu, 1 - \mu, 3 - \mu) = 0$

$$\mu = \frac{4}{3} \text{ entonces } \overrightarrow{HQ} = \left(-\frac{4}{3}, 1 - \frac{4}{3}, 3 - \frac{4}{3} \right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto

$Q(0, 1, 3)$ con vector director $\overrightarrow{HQ} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$, o bien,

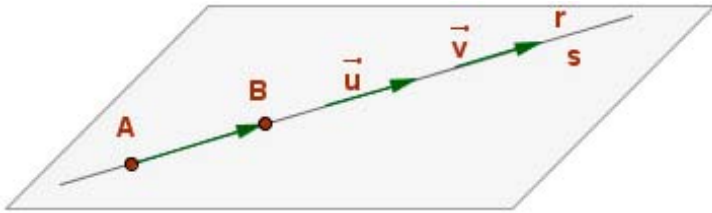
$\vec{v}_s = (-4, -1, 5)$, serán:

$$s \equiv \begin{cases} x = -4\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 3 + 5\mu \end{cases}$$

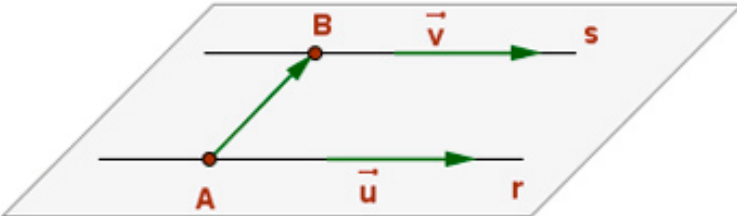


Dos rectas en la aldea ...

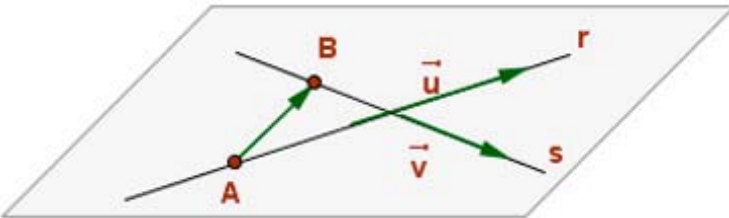
- $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 1 \mapsto$ Coincidentes
- $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 1 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \mapsto$ Paralelas
- $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \mapsto$ Secantes
- $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 3 \mapsto$ Se cruzan



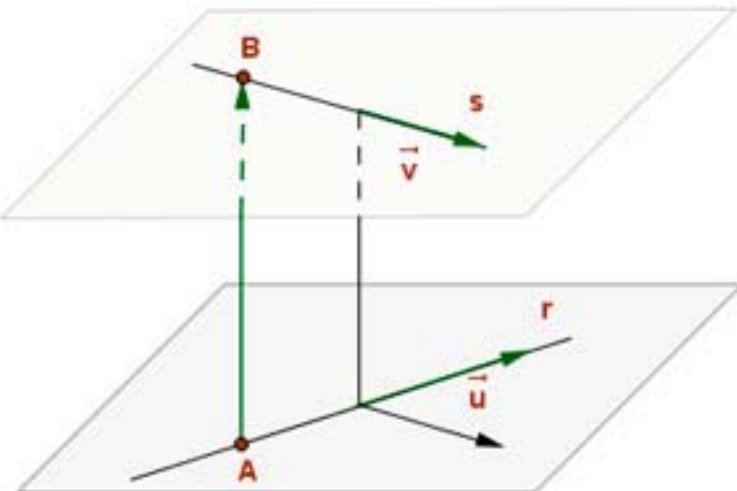
$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 1 \mapsto$ Coincidentes



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 1 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 2 \mapsto$ Paralelas



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) \mapsto$ Secantes



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) = 3 \mapsto$ Se cruzan

3. Encuentra un valor de $a \neq 0$ para que las rectas:

$$\begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2}$$

sean paralelas. Para el valor de a que has encontrado, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r : $\begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases}$

$$z = 1 \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x = 0 \end{cases} \mapsto x = 0, \quad y = 2 \Rightarrow A(0, 2, 1)$$

$$x = 1 \begin{cases} y - 5z = -4 \\ z = 3 \end{cases} \mapsto z = 3, \quad y = 11 \Rightarrow B(1, 11, 3)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto

$$A(0, 2, 1) \text{ con vector director } \overrightarrow{AB} = (1, 9, 2): r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 9\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

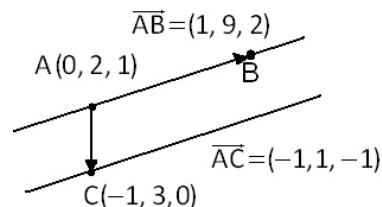
$$s \equiv x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2} \mapsto \begin{cases} C(-1, 3, 0) \\ \vec{v}_s = (1, a, 2) \end{cases}$$

Como $r \parallel s \mapsto$ Los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 9, 2)$ y $\vec{v}_s = (1, a, 2)$ son

$$\text{proporcionales: } \frac{1}{1} = \frac{9}{a} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 9$$

La ecuación implícita del plano que pasa por el punto $A(0, 2, 1)$ con vectores

$\overrightarrow{AB} = (1, 9, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1)$ será:



$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 9 & 1 & y-2 \\ 2 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 11x + y - 10z + 8 = 0$$

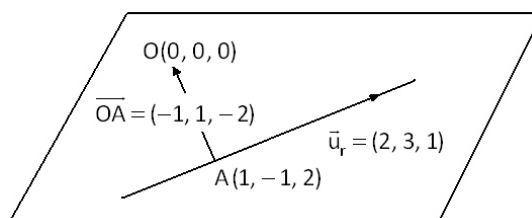
4. Dada la recta r definida por: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

- a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .
 b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

Solución:

a) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

$A(1, -1, 2)$, $\vec{u}_r = (2, 3, 1)$



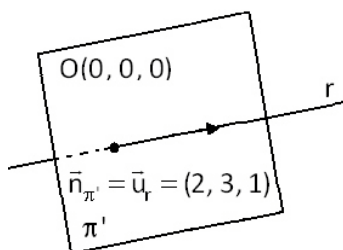
La ecuación implícita del plano que pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ con vectores directores $\vec{AO} = (-1, 1, -2)$ y $\vec{u}_r = (2, 3, 1)$ será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -7x + 3y + 5z = 0$$

b) Si $r \perp \pi' \mapsto \vec{n}_{\pi'} = \vec{u}_r = (2, 3, 1)$

La ecuación implícita del plano π' será: $2x + 3y + z + D = 0$

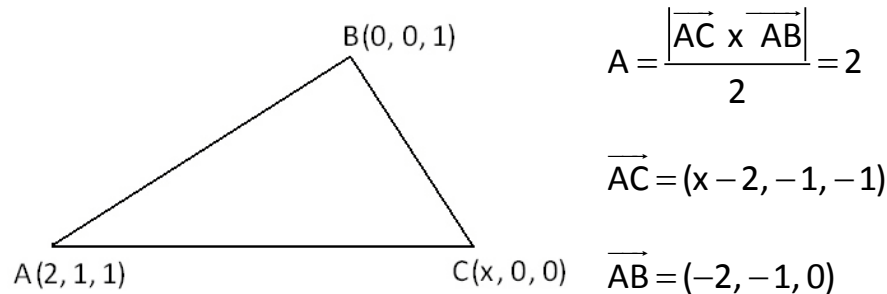
Como $O(0, 0, 0)$ es un punto del plano π' , sustituyendo: $D = 0$



La ecuación implícita del plano $\pi' \equiv 2x + 3y + z = 0$

5. Dados los puntos A(2, 1, 1) y B(0, 0, 1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución:



$$A = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{2} = 2$$

$$\vec{AC} = (x - 2, -1, -1)$$

$$\vec{AB} = (-2, -1, 0)$$

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - x\vec{k} \equiv (-1, 2, -x)$$

$$|\vec{AC} \times \vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-x)^2} = \sqrt{5 + x^2}$$

$$A = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{5 + x^2}}{2} = 2 \quad \mapsto \quad \sqrt{5 + x^2} = 4$$

$$5 + x^2 = 16 \quad \mapsto \quad x = \pm\sqrt{11}$$

Los puntos pedidos son: $(-\sqrt{11}, 0, 0)$ y $(\sqrt{11}, 0, 0)$

6. Considera las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Estudia la posición relativa de r y s
- Halla un punto P de r y otro punto Q de s tales que el vector \vec{PQ} sea perpendicular a ambas.
- ¿Cuántos cuadrados se pueden construir teniendo un vértice en el punto P y un lado en la recta s?. Calcula su área.

Solución:

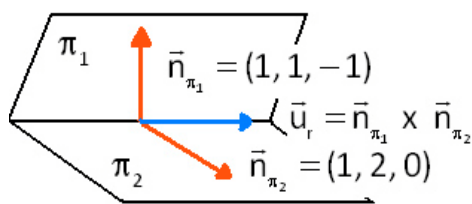
- Dos puntos y un vector director de la recta r son:

$$z=0 \begin{cases} x+y=4 \\ x+2y=7 \end{cases} \mapsto y=3, x=1 \quad A(1,3,0)$$

$$y=0 \begin{cases} x-z=4 \\ x=7 \end{cases} \mapsto x=7, z=3 \quad B(7,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (6, -3, 3) \approx \vec{u}_r = (2, -1, 1)$$

⊙ Adviértase que también se podría haber calculado un vector director de la recta r de la siguiente forma:



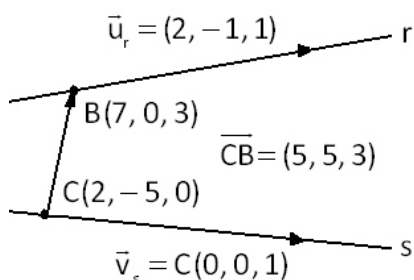
$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-4=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \quad \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$$

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-4=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (1, 2, 0) \end{cases} \mapsto \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \equiv (2, -1, 1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta $s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+5=0 \end{cases}$ son:

$$s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases} \mapsto C(2, -5, 0), \quad \vec{v}_s = C(0, 0, 1)$$



Se tienen los vectores:

$$\vec{u}_r = (2, -1, 1)$$

$$\vec{v}_s = C(0, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{CB} = C(5, 5, 3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \Rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes}$$

Las rectas se cruzan.

b) Los puntos de las recta r y s tienen la forma:

$$r \equiv \begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$P(7 + 2\mu, -\mu, 3 + \mu) \quad Q(2, -5, \lambda) \quad \overrightarrow{PQ} = (-5 - 2\mu, -5 + \mu, \lambda - 3 - \mu)$$

• Si $\overrightarrow{PQ} \perp r \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r \Rightarrow (-5 - 2\mu, -5 + \mu, \lambda - 3 - \mu) \cdot (2, -1, 1) = 0$

$$2(-5 - 2\mu) - (-5 + \mu) + (\lambda - 3 - \mu) = 0 \mapsto \lambda - 6\mu - 8 = 0 \quad (1)$$

• Si $\overrightarrow{PQ} \perp s \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_s \Rightarrow (-5 - 2\mu, -5 + \mu, \lambda - 3 - \mu) \cdot (0, 0, 1) = 0$

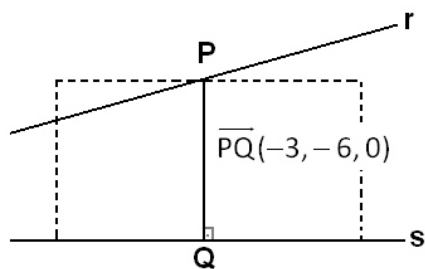
$$0(-5 - 2\mu) + 0(-5 + \mu) + (\lambda - 3 - \mu) = 0 \mapsto \lambda - 3 - \mu = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema (1) y (2): $\begin{cases} \lambda - 6\mu = 8 \\ \lambda - \mu = 3 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Sustituyendo en $P(7 + 2\mu, -\mu, 3 + \mu)$ y $Q(2, -5, \lambda)$:

$$P(5, 1, 2) \text{ y } Q(2, -5, 2) \text{ y } \overrightarrow{PQ}(-3, -6, 0)$$

c) Se pueden construir dos cuadrados que tengan un vértice en P y un lado en la recta s.



La longitud de los cuadrados

es $|\overrightarrow{PQ}|$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$A_{\text{cuadrado}} = |\overrightarrow{PQ}|^2 = 45 u^2$$

7. a) Prueba que si dos vectores \vec{u} y \vec{v} tienen el mismo módulo, entonces los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.

b) Considera los vectores $\vec{x} = (-1, 2, 3)$ e $\vec{y} = (2, 3, -1)$

1) Son linealmente independientes los vectores $\vec{x} + \vec{y}$ y $\vec{x} - \vec{y}$

2) Calcula el área del paralelogramo que tiene tres vértices consecutivos en los puntos $(1, 5, 2)$, $(0, 0, 0)$ y $(-3, -1, 4)$

Solución:

$$a) \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

$$\text{Si } \vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \cdot (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_1 + v_1) \cdot (u_1 - v_1) + (u_2 + v_2) \cdot (u_2 - v_2) + (u_3 + v_3) \cdot (u_3 - v_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1^2 - v_1^2 + u_2^2 - v_2^2 + u_3^2 - v_3^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \text{ pues } |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

$$b) 1) \vec{x} = (-1, 2, 3), \vec{y} = (2, 3, -1)$$

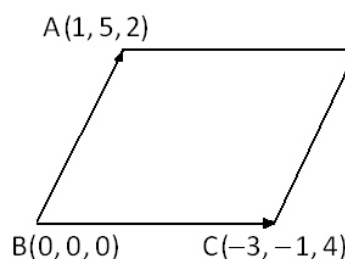
$$\vec{x} + \vec{y} = (1, 5, 2), \vec{x} - \vec{y} = (-3, -1, 4)$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y}$ e $\vec{x} - \vec{y}$ son linealmente independientes.

$$c) \vec{BA} = (1, 5, 2), \vec{BC} = (-3, -1, 4)$$

$$A_{\text{Paralelogramo}} = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$



$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k} \equiv (22, -10, 14)$$

$$A_{\text{Paralelogramo}} = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{22^2 + (-10)^2 + 14^2} = \sqrt{780} u^2$$

8. Dados los vectores $\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, c)$, determina el valor de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que los vectores \vec{v} y \vec{w} sean perpendiculares y además $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$, donde \times denota el producto vectorial.
¿Qué ángulo forman \vec{u} y \vec{v} en dicho caso?

Solución:

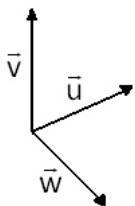
$$\vec{u} = (a, b, 1), \vec{v} = (-3, 4, 1), \vec{w} = (1, 2, c)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } \vec{v} \perp \vec{w} &\mapsto \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (-3, 4, 1) \cdot (1, 2, c) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3 + 8 + c = 0 \Rightarrow c = -5 \end{aligned}$$

$$\bullet \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-5b - 2)\vec{i} + (5a + 1)\vec{j} + (2a - b)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = (-5b - 2, 5a + 1, 2a - b)$$

$$\text{Si } \vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -5b - 2 = -3 \\ 5a + 1 = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} b = 1/5 \\ a = 3/5 \end{cases}$$



En este caso \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1\right) \cdot (-3, 4, 1) = \frac{-9}{5} + \frac{4}{5} + 1 = 0$$

9. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

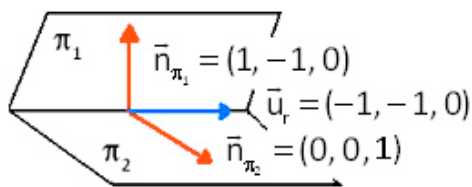
a) Determinar su posición relativa

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte

Solución:

a) Un punto A y un vector director de $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} \equiv \vec{u}_r = (-1, -1, 0)$$



$$x=0 \begin{cases} -y+2=0 \\ z=-1 \end{cases} \quad y=2$$

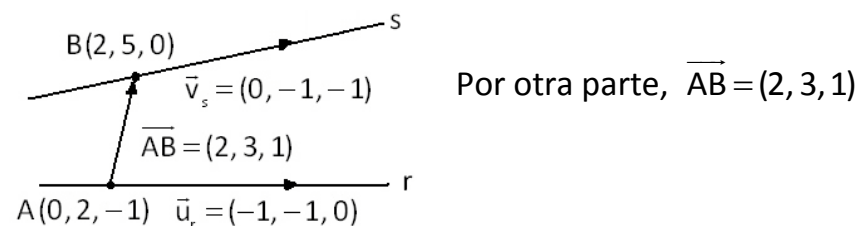
$$A(0, 2, -1)$$

Dos puntos B y C y un vector director de $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

$$z=0 \begin{cases} x=2 \\ y-5=0 \end{cases} \mapsto y=5 \quad B(2, 5, 0)$$

$$y=0 \begin{cases} x=2 \\ -z-5=0 \end{cases} \mapsto z=-5 \quad C(2, 0, -5)$$

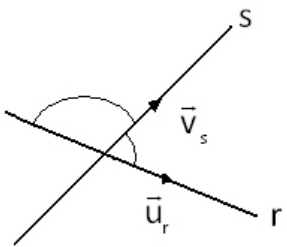
$$\vec{BC} = (0, -5, -5) \mapsto \vec{v}_s = (0, -1, -1)$$



Por otra parte, $\vec{AB} = (2, 3, 1)$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los vectores son linealmente dependientes y } \vec{u}_r, \vec{v}_s \text{ no son proporcionales}$$

Las rectas son secantes



$$\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{u}_r| |\vec{v}_s| \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s})$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = (-1, -1, 0) \cdot (0, -1, -1) = -1$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{2}, \quad |\vec{v}_s| = \sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s}) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s}) = 120^\circ$$

10. Resolver la siguiente ecuación vectorial: $\vec{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$ sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, donde el símbolo \wedge significa producto vectorial.

Solución:

$$\text{Si } \vec{x} = (a, b, c) \mapsto (a, b, c) \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(b+c)\vec{i} + (a+2c)\vec{j} + (a-2b)\vec{k} = (1, 3, 5)$$

$$\begin{cases} -b-c=1 \\ a+2c=3 \\ a-2b=5 \end{cases} \mapsto \text{sistema con infinitas soluciones} \mapsto \begin{cases} c = \frac{3-a}{2} \\ b = \frac{a-5}{2} \end{cases}$$

$$\text{La solución debe verificar } |\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 6$ sustituyendo, queda:

$$a^2 + \left(\frac{a-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2 = 6 \mapsto 3a^2 - 8a + 5 = 0 \mapsto \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{5}{3} \end{cases}$$

obteniéndose los resultados:

$$\bullet a=1, b=-2, c=1 \quad \vec{x}_1 = (1, -2, 1)$$

$$\bullet a=\frac{5}{3}, b=-\frac{5}{3}, c=\frac{2}{3} \quad \vec{x}_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

11. Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.

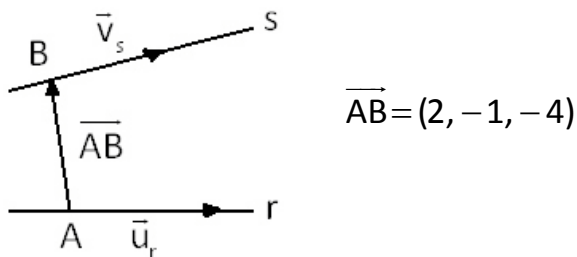
b) Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.

Solución:

a) Un punto y un vector director de cada recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \mapsto \vec{u}_r = (1, -2, 2), A(0, 1, 3)$$

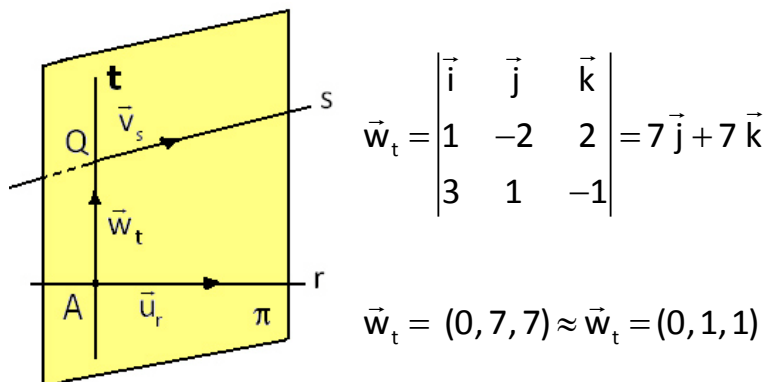
$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \mapsto \vec{v}_s = (3, 1, -1), B(2, 0, -1)$$



Si r y s se cruzan, los vectores \vec{u}_r , \vec{v}_s y \vec{AB} serán linealmente independientes, en consecuencia, su determinante debería ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0 \quad \mapsto \quad r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) Denotando por t a la perpendicular común.



$$\vec{w}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{w}_t = (0, 7, 7) \approx \vec{w}_t = (0, 1, 1)$$

El plano π que contiene a \vec{w}_t y a la recta r : $\vec{u}_r = (1, -2, 2)$, $A(0, 1, 3)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -2 & y-1 \\ 1 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 4x + y - z + 2 = 0$$

Un punto Q de la recta t será $Q = \pi \cap s$, se halla sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta s en π :

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \mapsto \quad \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$\pi \equiv 4x + y - z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 4(2 + 3\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 2 = 0$$

$$14\lambda + 11 = 0 \quad \mapsto \quad \lambda = \frac{-11}{14}$$

$$Q\left(2 - \frac{33}{14}, -\frac{11}{14}, -1 + \frac{11}{14}\right) \equiv Q\left(\frac{-5}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-3}{14}\right)$$

La ecuación de la recta t perpendicular a las rectas r y s , con el vector director $\vec{w}_t = (0, 1, 1)$ y el punto $Q\left(\frac{-5}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-3}{14}\right)$, será:

$$t \equiv \begin{cases} x = \frac{-5}{14} \\ y = \frac{-11}{14} + \lambda \\ z = \frac{-3}{14} - \lambda \end{cases}$$

12. Dados el plano $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

- a) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.
 b) Encuentra la ecuación continua de la recta s contenida en el plano π , que es perpendicular a r y corta a la recta r .

Solución:

$$a) r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 & \mapsto \vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 1) \\ 2x - y + z = 10 & \mapsto \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -3)$$

$$\text{para } x = 0 \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 10 \end{cases} \mapsto z = 5, y = -5 \quad A(0, -5, 5)$$

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$$

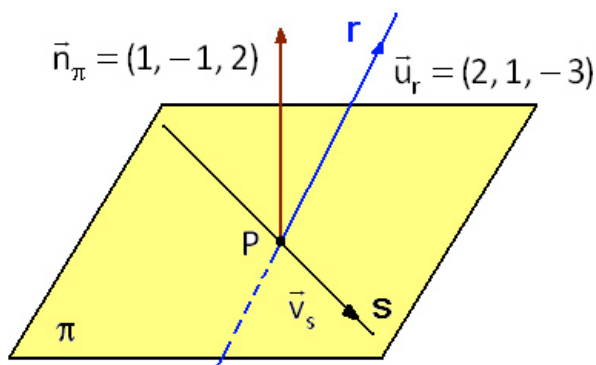
Para hallar un punto $P = r \cap \pi$ se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta r en el plano π

$$\pi: x - y + 2z - 5 = 0 \mapsto 2\lambda - (-5 + \lambda) + 2(5 - 3\lambda) - 5 = 0$$

$$-5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ y el punto } P(4, -3, -1)$$

$$b) \begin{cases} s \subset \pi \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \\ s \perp r \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{u}_r \end{cases}$$

Como $s \subset \pi$ y s corta a r ,
el punto $P \in s$



$$\vec{v}_s = \vec{u}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -7, -3)$$

$$\text{La ecuación continua de } s: s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{-3}$$

13. Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes OX, OY y OZ tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m, respectivamente.

a) Halle la ecuación del plano π .

b) Halle la ecuación de la recta r que contiene a los puntos $A(2, 0, 3)$ y $B(0, 6, a)$ y estudie la posición relativa de π y r según los valores de a .

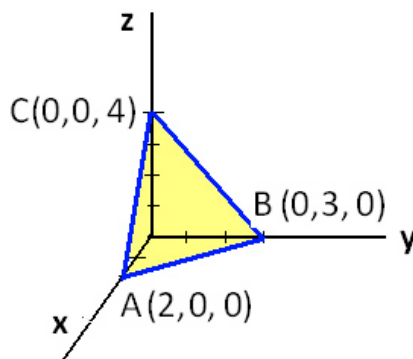
c) Para el caso $a=2$, halle el punto donde se cortan π y r .

Solución:

a) El plano π pasa por los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 0, 4)$

$$\vec{AB} = (-2, 3, 0)$$

$$\vec{AC} = (-2, 0, 4)$$



El plano π se halla con $A(2, 0, 0)$, $\vec{AB} = (-2, 3, 0)$ y $\vec{AC} = (-2, 0, 4)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} -2 & -2 & x-2 \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

b) La ecuación paramétrica de la recta r que pasa por los puntos $A(2,0,3)$, $B(0, 6, a)$, con $\overline{AB} = (-2, 6, a-3)$ será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 3 + (a-3)\lambda \end{cases}$$

Para hallar la posición relativa de r y π , se sustituyen las ecuaciones de r en el plano π :

$$\pi \equiv 6x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad \mapsto$$

$$6(2 - 2\lambda) + 4(6\lambda) + 3[3 + (a-3)\lambda] - 12 = 0 \quad \mapsto \quad 3\lambda + 3a\lambda = -9$$

$$\lambda = \frac{-9}{3+3a} \equiv \begin{cases} \text{Si } a = -1 \text{ no existe valor de } \lambda \mapsto r \parallel \pi \\ \text{Si } a \neq -1 \mapsto r \text{ y } \pi \text{ se cortan} \end{cases}$$

$$c) \text{ Si } a = 2 \mapsto \lambda = \frac{-9}{3 + 3 \cdot 2} = -1$$

sustituyendo los valores $a = 2$ y $\lambda = -1$ en la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2 \\ y = -6 \\ z = 3 + 1 \end{cases} \quad \text{se cortan en } P(4, -6, 4)$$

- 14.** Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
- Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
 - Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
 - Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidisten de P_1 y de P_3 .

Solución:

a) Sean los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$

La ecuación del plano π que pasa por P_1, P_3 y P_4 con $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$,
 $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3)$ y $P_4(2, 0, 2)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ 2 & -3 & y \\ 5 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 21x + 5y - 2z - 38 = 0$$

Ahora se impone la condición que $P_2(a, 2, 0)$ verifique la ecuación:

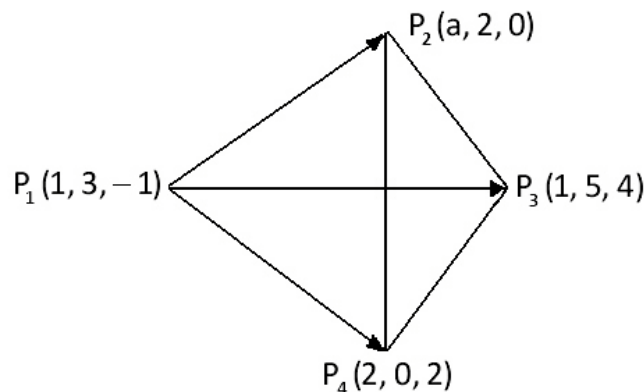
$$21 \cdot a + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 38 = 0 \quad \mapsto \quad 21a = 28 \quad \mapsto \quad a = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

b)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3)$$

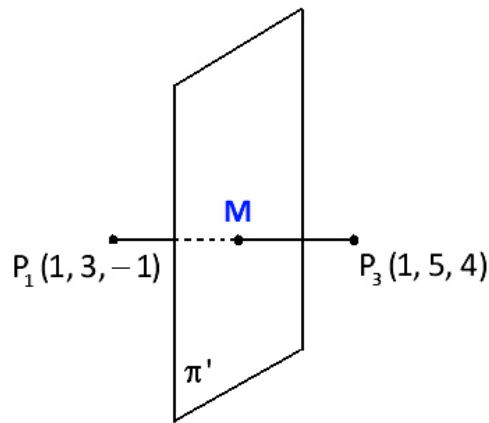


$$V_{\text{Tetraedro}} = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}) \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \right| = 7 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad 21a - 28 = 42 \quad \mapsto \quad a = \frac{70}{21} = \frac{10}{3}$$

c) Si π' equidista de P_1 y de P_3 , entonces M , el punto medio de $\overline{P_1P_3}$, pertenece a π' :

$$M = \frac{P_1 + P_3}{2} = \left(1, 4, \frac{3}{2}\right)$$



El plano π' es perpendicular a $\overline{P_1P_3}$, en consecuencia, $\vec{n}_{\pi'} = \overline{P_1P_3} = (0, 2, 5)$

La ecuación del plano π' es de la forma: $2y + 5z + D = 0$

Como $M\left(1, 4, \frac{3}{2}\right) \in \pi'$ tiene que verificar la ecuación del plano:

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{3}{2} + D = 0 \quad \mapsto \quad D = \frac{-31}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv 2y + 5z - \frac{31}{2} = 0$$

$$\pi' \equiv 4y + 10z - 31 = 0$$

15. Dados el plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de r y π . Calcula la distancia de r a π
- Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución:

a) $\pi: x + y - z - 1 = 0$

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_1} = (3, 1, 1) \\ 2x + y - 2 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_2} = (2, 1, 0) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_1} = (3, 1, 1) \\ 2x + y - 2 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_2} = (2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

Un punto de r , por ejemplo, si $y = 0$:

$$y = 0 \begin{cases} 3x + z - 6 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \mapsto x = 1, z = 3 \quad A(1, 0, 3)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Para hallar la posición relativa de r y π , se sustituyen las ecuaciones paramétricas de r en el plano π :

$$\pi: (1 - \lambda) + 2\lambda - (3 + \lambda) - 1 = 0 \mapsto -3 \neq 0$$

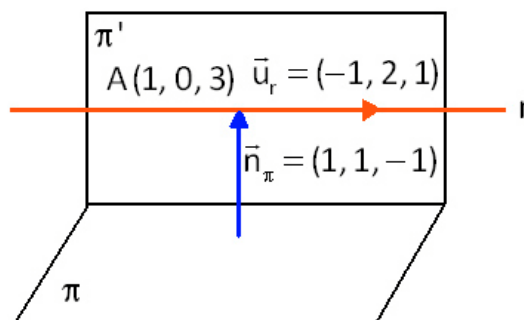
Como la ecuación no tiene solución, r y π no tienen puntos comunes. En consecuencia, $r \parallel \pi$

La distancia entre r y π , con $A(1, 0, 3)$ y $\pi: x + y - z - 1 = 0$, es:

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(A, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ u}$$

c) Como $\pi' \perp \pi \mapsto \vec{n}_\pi \parallel \pi'$

π' se determina con A , \vec{u}_r y \vec{n}_π



$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \mapsto \pi' \equiv x + z - 4 = 0$$

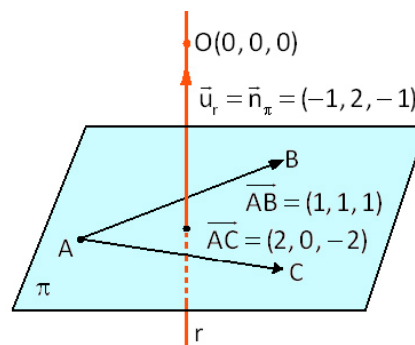
16. a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 3)$ y $C(3, 0, 0)$
 b) Calcula los posibles valores de a para que el punto $P(a, a, a)$ equidiste de la recta r y del plano π del apartado anterior.

Solución:

a) $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 0, 0) \mapsto \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 4, -2)$$

$$\vec{n}_\pi = (-1, 2, -1)$$

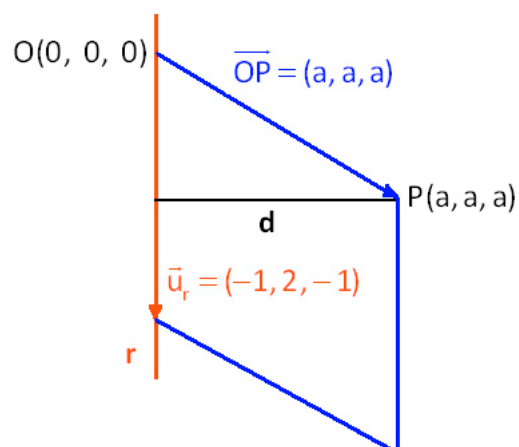
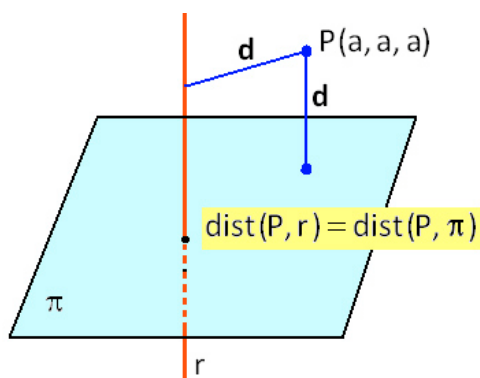


Como $r \perp \pi \mapsto \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (-1, 2, -1)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $O(0, 0, 0)$ con vector director $\vec{u}_r = (-1, 2, -1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b)



- La distancia del punto P a la recta r :

$$\text{Area}_{\text{paralelogramo}} = |\vec{u}_r \times \vec{OP}| = |\vec{u}_r| \cdot d \quad \mapsto \quad d = \text{dist}(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{OP}|}{|\vec{u}_r|}$$

$$\vec{u}_r \times \vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ a & a & a \end{vmatrix} = (3a, 0, -3a)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{OP}| = \sqrt{9a^2 + 9a^2} = 3a\sqrt{2} \quad |\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$d = \text{dist}(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{OP}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = a\sqrt{3}$$

Para calcular la ecuación del plano π se toma el punto $C(3, 0, 0)$ y los vectores $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AC} = (2, 0, -2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-3 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

• La distancia del punto P al plano π :

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|1 \cdot a - 2 \cdot a + 1 \cdot a - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

• $\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, r) \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} = a\sqrt{3} \mapsto a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

17. Dado el punto $P(1, 1, 1)$ y el plano $\pi: x - y + z = 5$

a) Calcula las ecuaciones continuas de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P .

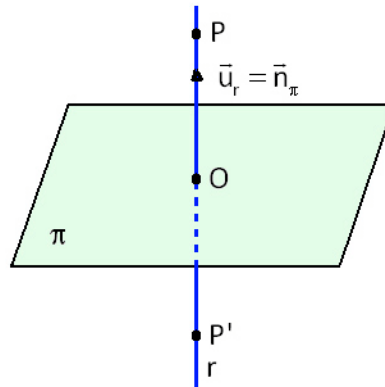
b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π .

Solución:

a) $P(1, 1, 1)$, $\pi: x - y + z = 5$

$r \perp \pi \mapsto \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$



b) El punto $O = r \cap \pi$ se calcula sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \begin{array}{l} \pi: x - y + z = 5 \\ (1 + \lambda) - (1 - \lambda) + (1 + \lambda) = 5 \end{array}$$

$$3\lambda = 4 \mapsto \lambda = \frac{4}{3} \mapsto O\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$O = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{7}{3} \mapsto x = \frac{11}{3} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{-1}{3} \mapsto y = \frac{-5}{3} \\ \frac{z+1}{2} = \frac{7}{3} \mapsto z = \frac{11}{3} \end{cases}$$

El punto simétrico de P respecto de π es $P'\left(\frac{11}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{11}{3}\right)$

18. Dado el punto $P(1, 1, 3)$ y la recta

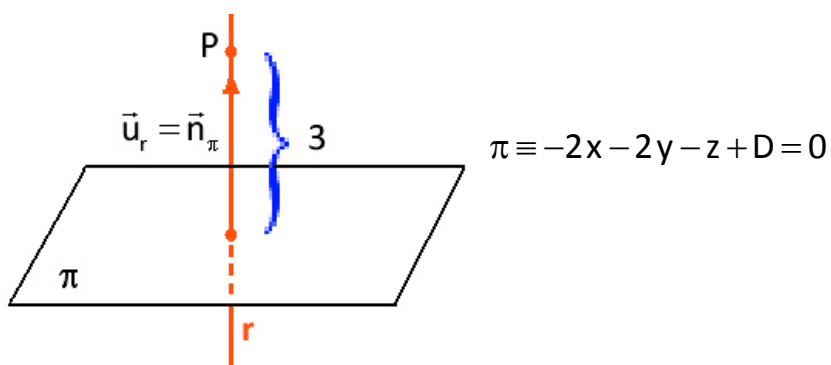
$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

encuentre la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r y que cumple $\text{dist}(P, \pi) = 3$

Solución:

a) $P(1, 1, 3)$, $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_1} = (2, -1, -2) \\ x - y + 4 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_2} = (1, -1, 0) \end{cases}$

$$r \perp \pi \mapsto \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, -1)$$



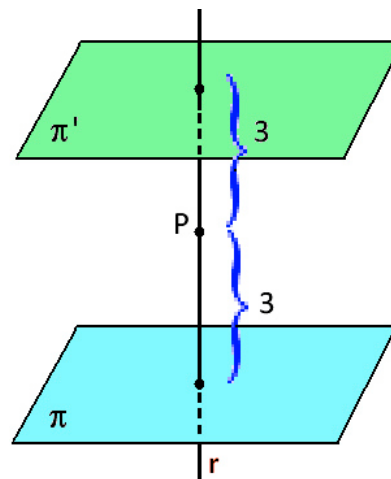
Como $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|-2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 3 \mapsto \frac{|-7 + D|}{3} = 3$

$$|-7 + D| = 9 \mapsto \begin{cases} -7 + D = 9 \mapsto D = 16 \\ -7 + D = -9 \mapsto D = -2 \end{cases}$$

Hay dos planos que verifican las condiciones:

$$\pi \equiv -2x - 2y - z + 16 = 0$$

$$\pi' \equiv -2x - 2y - z - 2 = 0$$

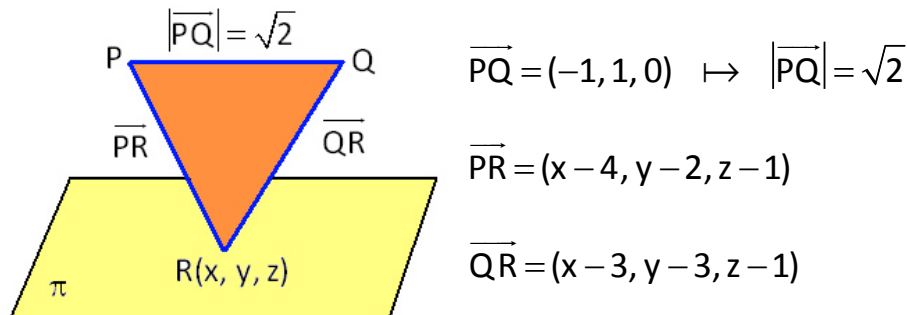


19. Dados los puntos $P(4, 2, 1)$ y $Q(3, 3, 1)$, encuentra los dos puntos, R_1 y R_2 , del plano $\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0$ tales que PQR_1 y PQR_2 son triángulos equiláteros.

Solución:

a) $P(4, 2, 1)$, $Q(3, 3, 1)$, $\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0$

Sea $R(x, y, z)$ un punto del plano π



Para que el triángulo PQR sea equilátero, se tiene que cumplir:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = |\overline{QR}| = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\text{Como } R \in \pi \text{ verifica la ecuación: } x - y - 2z + 3 = 0 \quad (3)$$

Operando, resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 19 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 2z + 17 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Restando la 2ª ecuación de la 1ª, resulta: $-2x + 2y + 2 = 0$

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} -2x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \mapsto z = 2$$

$$x - y - 2z + 3 = 0 \mapsto x - y = 1 \mapsto x = 1 + y$$

Con $z=2$, $x=1+y$ en $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 19 = 0$
 $(1+y)^2 + y^2 + 4 - 8(1+y) - 4y - 4 + 19 = 0$

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \mapsto \begin{cases} y=3 & x=4 \\ y=2 & x=3 \end{cases}$$

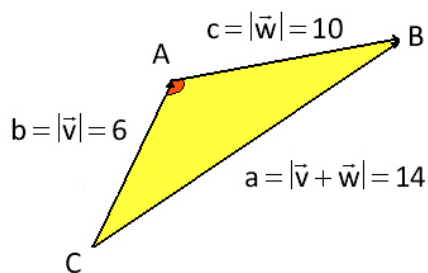
Los puntos pedidos son: $R_1(4, 3, 2)$ y $R_2(3, 2, 2)$

20. a) Si $|\vec{v}|=6$, $|\vec{w}|=10$ y $|\vec{v} + \vec{w}|=14$, calcula el ángulo que forman los vectores \vec{v} y \vec{w} .

b) Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(-1, 5, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:



a) $|\vec{v}|=6$, $|\vec{w}|=10$, $|\vec{v} + \vec{w}|=14$

Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$14^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \hat{A} \mapsto 196 = 136 - 120 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{-1}{2} \mapsto \hat{A} = 120^\circ$$

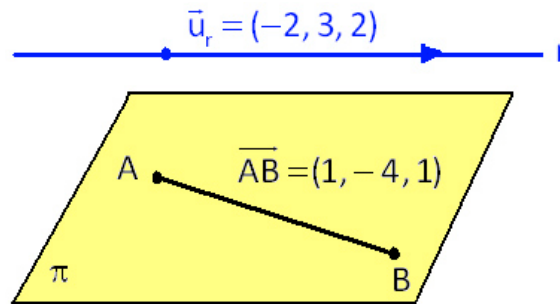
b) $A(-1, 5, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $\overline{AB} = (1, -4, 1)$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_1} = (3, 2, 0) \\ 2y - 3z - 1 = 0 \mapsto \vec{n}_{\pi_2} = (0, 2, -3) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6, 9, 6) / \boxed{\vec{u}_r = (-2, 3, 2)}$$


Ecuación paramétrica plano π :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = 1 - 4\lambda + 3\mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$





La ecuación general del plano π que pasa por el punto $B(0, 1, 1)$ con vectores directores $\overline{AB} = (1, -4, 1)$ y $\vec{u}_r = (-2, 3, 2)$:


$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ -4 & 3 & y-1 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0$$





PORTAL ESTADÍSTICA APLICADA


Video
Contrastes


Algebra
Lineal



Decisiones
en Bolsa



Matrices
Determinantes



Métodos
Integración



Ecuaciones
Diferenciales


PAU MATEMÁTICAS



Estadística
Probabilidad


Programación
Lineal



Matrices
Determinantes


Análisis
Matemático


Geometría



Sistema
Ecuaciones



Destrezas
Matemáticas

GEOMETRÍA