## CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS NIVEL III (3° Y 4° DE ESO)

**1.** Al dividir un número entre 7 obtendremos un resto de 2. ¿Qué resto obtendremos si añadimos 2004 a dicho número y lo dividimos entre 7?

A) 5 B) 4 C) 2 D) 0 E) 6

*Solución:*

Sea N el número, como Dividendo = Divisor x Cociente + Resto, se tiene que $N = 7\,x + 2$

Al dividir 2004 entre 7 se obtiene: $2004 = 7\,.\,286 + 2$

Sumando 2004 al número dado N, resulta:

$$N + 2004 = \left[7\,x + 2\right] + \left[7\,.\,286 + 2\right] = 7\left[x + 286\right] + 4 \quad \mapsto \quad R = 4$$

Si la suma de los restos hubiera sido $R \geq 7$ se tendría que restar 7 a dicha suma, puesto que el resto tiene que ser menor que 7

**2.** ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 11?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 90

*Solución:*

- Para que un número sea múltiplo de 11 la suma de las cifras que ocupan lugar par menos la suma de las cifras que ocupan lugar impar tiene que ser 0 o múltiplo de 11

- Como el número es capicúa, la cifra de las centenas debe ser igual a la cifra de las unidades.

Comenzando con orden, los capicúas solicitados son ocho:

121 242 363 484 616 737 858 979

**3.** El mínimo común múltiplo de $3\,.\,10^3$, $4\,.\,10^4$, $25\,.\,10^5$, $9\,.\,10^6$ es:

A) $45\,.\,10^6$ B) $75\,.\,10^6$ C) $9\,.\,10^7$ D) $18\,.\,10^7$ E) $9\,.\,10^6$

*Solución:*

Descomponiendo los números, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 3\,.\,10^3 = 2^3\,.\,3\,.\,5^3 \\ 4\,.\,10^4 = 2^6\,.\,5^4 \\ 25\,.\,10^5 = 2^5\,.\,5^7 \\ 9\,.\,10^6 = 2^6\,.\,3^2\,.\,5^6 \end{array}\right\} \mapsto \quad m.c.m = 2^6\,.\,3^2\,.\,5^7 = 2^6\,.\,3^2\,.\,5\,.\,5^6 = 45\,.\,10^6$$

**4.** Una fotocopiadora tarda en sacar 'm' fotocopias una hora y otra para sacar el mismo número de fotocopias tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos juntas en sacar ese número de 'm' fotocopias?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 36 E) 40

*Solución:*

La primera fotocopiadora saca m fotocopias en 60 minutos. Por tanto, en 1 minuto saca $\dfrac{m}{60}$ fotocopias.

La segunda fotocopiadora saca m fotocopias en 90 minutos. En consecuencia, en 1 minuto saca $\dfrac{m}{90}$ fotocopias.

En 1 minuto las dos fotocopiadoras juntas sacan $\dfrac{m}{60}+\dfrac{m}{90}$ fotocopias:

$$\frac{m}{60}+\frac{m}{90}=\frac{3m+2m}{180}=\frac{5m}{180}=\frac{m}{36} \text{ fotocopias}$$

Con lo cual, para obtener 'm' fotocopias tardarán 36 minutos

**5.** El número 'm' verifica que cada pareja de números 24, 42 y m tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de números 6, 15 y m tiene el mismo común múltiplo. ¿Quien es m?

A) 10 B) 12 C) 105 D) 36 E) 30

*Solución:*

Descomponiendo en factores primos:

$$\left.\begin{matrix} 24 = 2^3\,.\,3 \\ 42 = 2\,.\,3\,.\,7 \end{matrix}\right] \rightarrow \quad m.c.d.\,(24, 42) = 2\,.\,3 \quad \mapsto \quad m = 2\,.\,3\,.\,a$$

$a \neq 7$ para que todas las parejas (24, 42), (24, m) y (42, m) tengan el mismo máximo común divisor.

$$\left.\begin{matrix} 6 = 2\,.\,3 \\ 15 = 3\,.\,5 \end{matrix}\right] \rightarrow \quad m.c.m.\,(6, 15) = 2\,.\,3\,.\,5 \quad \mapsto \quad m = 2\,.\,3\,.\,5 = 30$$

Para que todas las parejas (5, 15), (6, m) y (15, m) tengan el mismo mínimo común múltiplo obliga a que $m = 30$

**6.** ¿Cuántas parejas de enteros (a, b) donde a y b no tienen por qué ser positivos, verifican la ecuación $\frac{1}{10} = \frac{1}{a} + \frac{b}{5}$ ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

*Solución:*

Se observa la relación que existe entre a y b:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{a} + \frac{b}{5} \quad \mapsto \quad \frac{a}{10a} = \frac{10}{10a} + \frac{2ab}{10a} \quad \Rightarrow \quad a = 10 + 2ab \quad \Rightarrow \quad 10 = a(1 - 2b)$$

Siendo a y b enteros, hay que analizar las posibles parejas para que el producto $a\left[1 - 2b\right]$ sea 10.

Se trata de calcular b en los casos en que sea posible:

| a | $a\left[1-2b\right]$ | b | |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | $b=-\frac{9}{2}$ | No vale |
| -1 | 10 | $b=\frac{11}{2}$ | No vale |
| 2 | 10 | $b=-2$ | Si vale |
| -2 | 10 | $b=3$ | Si vale |
| 5 | 10 | $b=-\frac{1}{2}$ | No vale |
| -5 | 10 | $b=\frac{3}{2}$ | No vale |
| 10 | 10 | $b=0$ | Si vale |
| -10 | 10 | $b=1$ | Si vale |

Se obtienen 4 parejas enteras que son válidas: $(2,-2)$ $(-2,3)$ $(10,0)$ $(-10,1)$

**7.** ¿Qué cifra ocupa el lugar 2004 después de la coma, en la expresión decimal de $\frac{3}{7}$?

A) 2 B) 8 C) 5 D) 7 E) 1

*Solución:*

$$\frac{3}{7}=0,428571\ 428571\ 428571\ \circ\circ\circ\circ\circ\circ \xrightarrow{\text{periodo 6 cifras}} \frac{3}{7}=0,\widehat{428571}$$

Al dividir $\frac{2004}{6}=334 \mapsto \text{Resto}=0 \longrightarrow$ La cifra que ocupa el lugar 2004 después de la coma es la sexta del período, esto es, 1

**8.** Cuando invertimos las cifras de un número de dos cifras, ninguna de ellas cero, obtenemos un número que es 36 unidades menor que el número original. ¿Cuál puede ser la suma de las cifras de ese número?

A) 4 B) 5 C) 12 D) 15 E) 18

*Solución:*

Sea el número $N = ab = 10a + b \quad \mapsto \quad N' = ba = 10b + a$

$$N - N' = 36 \quad \Rightarrow \quad [10a + b] - [10b + a] = 36 \quad \longrightarrow \quad 9a - 9b = 36 \quad \Rightarrow \quad a - b = 4$$

Es decir, las cifras de las decenas es 4 unidades mayor que la cifra de las unidades.

Las posibilidades son: $\boxed{51}$ $\boxed{62}$ $\boxed{73}$ $\boxed{84}$ $\boxed{95}$

Al sumar sus cifras: $\underline{6|}$ $\underline{8|}$ $\underline{10|}$ $\underline{12|}$ $\underline{14|}$

La respuesta es 12

**9.** Uno de los números siguientes es $2^{100}$. ¿Cuál?

A) $4^5 \,.\, 2^{10}$ B) $\dfrac{2^{101}}{2}$ C) $16^5 \,.\, 2^5$ D) $\left(2^3\right)^{97}$ E) $2^2 + 2^{98}$

*Solución:*

$4^5 \,.\, 2^{10} = \left(2^2\right)^5 \,.\, 2^{10} = 2^{10} \,.\, 2^{10} = 2^{20}$

$\dfrac{2^{101}}{2} = 2^{100}$

$16^5 \,.\, 2^5 = \left(2^4\right)^5 \,.\, 2^5 = 2^{20} \,.\, 2^5 = 2^{25}$

$\left(2^3\right)^{97} = 2^{291}$

$2^2 + 2^{98}$ no se pueden aplicar las propiedades de las potencias, no obstante basta observar que $2^2 + 2^{98} \neq 2^2 \,.\, 2^{98} = 2^{100}$

**10.** Si n es un número de 5 cifras y q y r el cociente y el resto, respectivamente, de la división de n entre 100. ¿Para cuántos valores de n es $(q+r)$ divisible entre 11?

A) 8180 B) 8181 C) 8182 D) 9000 E) 9090

*Solución:*

Dividendo = Divisor x Cociente + Resto $\mapsto$ $n = 100q + r$

Al querer analizar $(q+r)$, restando $99q$ a la igualdad anterior, resulta:

$n = 100q + r \longrightarrow n - 99q = q + r$

Nos preguntamos, cuándo $\left[n - 99q\right]$ es divisible por 11. Es evidente que lo será cuando n sea divisible por 11.

La cuestión queda simplificada a encontrar los múltiplos de 11 de cinco cifras, esto es, los números comprendidos entre $(10000 - 99999)$:

- Primer múltiplo de 11 es $910 \,.\, 11 = 11910 \longleftrightarrow$ Entera aprox$\left(10000/11\right) = 910$
- Último múltiplo de 11 es $9090 \,.\, 11 = 99990 \longleftrightarrow$ Entera$\left(99999/11\right) = 9090$

En consecuencia, los múltiplos de 11 de cinco cifras: $9090 - 910 + 1 = 8181$

**11.** ¿Para cuántos enteros positivos "n" resulta que $n^2 - 3n + 2$ es un número primo?

A) Ninguno B) Uno C) Dos D) Infinitos E) Cantidad fija mayor que 2

*Solución:*

$n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$ es el producto de dos números consecutivos, en consecuencia el producto será siempre par.

El único par que es primo es el 2.

En resumen, la expresión $n^2 - 3n + 2$ sólo es un número primo cuando sea igual a 2, con lo cual:

$n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1) = 2 \quad \longrightarrow \quad n^2 - 3n = 0 \quad \mapsto \quad n = 3$ es el único entero positivo que hace prima la expresión matemática.

La contestación correcta es la (B)

**12.** Los enteros positivos A, B, A-B y A+B son todos primos. La suma de los cuatro es:

A) Par B) Divisible por 3 C) Divisible por 5 D) Divisible por 7 E) Primo

*Solución:*

Para que al sumar dos números primos se obtenga otro número primo no puede ser que los dos números primos que se suman sean impares, puesto que *impar + impar = par.*

Con lo cual, uno de los primos debe ser el 2. Siendo B el más pequeño: $B = 2$

La situación queda reflejada en la tabla siguiente:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A-1$ | $A$ | $A+1$ | $A-B=A-2$ | $A+B=A+2$ |
| par | primo impar | par | primo impar | primo impar |

Aparecen tres números impares, por necesidad uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3

Sólo hay un número primo que es múltiplo de 3, que es el 3

Luego $A - B = 3 \xrightarrow{B=2} A = 5 \longrightarrow \begin{cases} A - B = 3 \\ A + B = 7 \end{cases}$

La suma de los números primos: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ que es un número primo, siendo (E) la respuesta correcta.

**13.** ¿Para cuántos enteros positivos "n" es $\dfrac{n}{20-n}$ el cuadrado de un número entero?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

*Solución:*

$$\frac{n}{20-n} \Rightarrow \begin{cases} n > 0 \\ 20-n > 0 \quad \mapsto \quad n < 20 \\ \dfrac{n}{20-n} \text{ entero} \quad \mapsto \quad n \geq 20-n \quad \mapsto \quad n \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{10 \leq n < 20}$$

Falta probar el valor que puede tomar n entre $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

Se encuentran tres números que verifican que $\dfrac{n}{20-n}$ es un cuadrado:

$$n = 10: \quad \frac{10}{20-10} = 1 = 1^2 \qquad n = 16: \quad \frac{16}{20-16} = 4 = 2^2 \qquad n = 18: \quad \frac{18}{20-18} = 9 = 3^2$$

La respuesta correcta es (C)

**14.** El profesor pidió a Sara que restara 3 de cierto número y luego dividiera el resultado entre 9. En vez de hacer esto, Sara le restó 9 al número y dividió el resultado entre 3, obteniendo 43. ¿Qué habría obtenido si hubiera hecho lo que le dijeron?.

A) 15 B) 34 C) 43 D) 51 E) 138

*Solución:*

Sara pensó en el número x, con lo cual hizo: $\dfrac{x-9}{3} = 43 \quad \mapsto \quad x - 9 = 129 \quad \mapsto \quad x = 138$

Pero debió hacer: $\dfrac{x-3}{9} \quad \mapsto \quad \dfrac{138-3}{9} = \dfrac{135}{9} = 15$

La respuesta correcta es (A)

**15.** El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va a la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio. ¿Quién acabó el primero?

A) Antonio B) Benito C) Carlos D) Antonio y Carlos a la vez
E) Acabaron los tres a la vez

*Solución:*

El tamaño de los jardines (espacio) será: $\begin{cases} \text{Antonio}: & 2e \\ \text{Benito}: & e \\ \text{Carlos}: & \dfrac{2e}{3} \end{cases}$

Como $\text{espacio} = \text{velocidad} \,.\, \text{tiempo} \xrightarrow{e=v.t} \text{tiempo} = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} \approx \left[ t = \dfrac{e}{v} \right]$

Llamando $v = \text{"velocidad"}$ $\begin{cases} \text{Antonio}: & \dfrac{3v}{2} \\ \text{Benito}: & v \\ \text{Carlos}: & \dfrac{v}{2} \end{cases}$

El tiempo empleado por cada uno será: $\begin{cases} \text{Antonio}: & \dfrac{2e}{\frac{3v}{2}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{e}{v} = \dfrac{4}{3}t \\ \text{Benito}: & \dfrac{e}{v} = t \\ \text{Carlos}: & \dfrac{\frac{2e}{3}}{\frac{v}{2}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{e}{v} = \dfrac{4}{3}t \end{cases}$

Benito es el que menos tiempo emplea en cortar la hierba del jardín.